

I. *Ueber die Abhängigkeit der durch das Licht bewirkten Electricitätszerstreuung von der Natur der belichteten Oberfläche;*
von J. Elster und H. Geitel.

Die eigenthümliche Wirkung des Lichtes, das Entweichen der Electricität von der Oberfläche negativ electrisirter Leiter zu befördern, ist an den Strahlen der grössten Brechbarkeit zuerst bemerkt worden und wurde deshalb als eine besondere Eigenschaft des ultravioletten Lichtes angesehen. Indessen hatten schon die ersten Versuche erkennen lassen, dass bei Verwendung einer und derselben Lichtquelle die Zerstreuung von der Beschaffenheit der bestrahlten Oberfläche abhängt¹⁾, ferner zeigte sich, dass auch die Natur des umgebenden Gases²⁾ von Einfluss auf den Verlauf von elektrischen Funkenentladungen war, die von einer belichteten Kathode aus erfolgten. Man konnte also erwarten, dass, wenn man nur die belichtete Oberfläche angemessen wählen und in ein Gas von passender Beschaffenheit einführen würde, auch für das Zustandekommen der lichtelectrischen Zerstreuung die Intensität und Wellenlänge des zur Bestrahlung verwandten Lichtes in weiteren Grenzen veränderlich sein durften. Versuche mit Sonnen- und Tageslicht, über die wir in einigen früheren Abhandlungen³⁾ berichteten, hatten diese Vermuthung bestätigt. Im Gegensatz zu dem an kurzweligen Strahlen reichen und auf die verschieden-

1) Hallwachs, Wied. Ann. 33. p. 308. 1888.

2) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. 33. p. 258 ff. 1888.

3) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 38. p. 40 u. 497. 1889.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLIII.

artigsten Körper wirkenden electrischen Bogen- und Funkenlichte vermag das durch die atmosphärische Absorption seines Gehaltes an Ultraviolett zum grössten Theil beraubte Sonnenlicht in Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit nur bei einigen ganz bestimmten Substanzen die Entladung herbeizuführen.

Diese waren von den metallischen Körpern: Kalium- und Natrium-Amalgam, Magnesium, Aluminium, Zink-Amalgam, Zink, Zinn-Amalgam. Die Wirkung liess eine Abstufung erkennen, welche durch die eingehaltene Reihenfolge wiedergegeben ist. Oberflächen von: Platin, Kupfer, Messing, Eisen, Kohle, gaben unter gleichen Verhältnissen keine Wirkung. Schon A. Righi¹⁾ hatte bemerkt, dass die photo-electrische Zerstreuung in ultraviolettem Lichte schneller bei Zink und Aluminium als bei Kupfer und Gold erfolgt. Die Amalgame der Alkalimetalle, die nicht luftbeständig sind, schlossen wir bei späteren Versuchen in evakuierte Glasrecipienten ein. Allerdings verliert man so einen Theil des wirksamen Lichtes durch Absorption im Glase, andererseits erhöht sich die Lichtempfindlichkeit der Metalloberfläche mit abnehmender Gasdichte, wie von A. Righi²⁾ gefunden ist, um ein Bedeutendes.

Man erkennt sofort, dass die oben genannten wirksamen Metalle zu den am leichtesten oxydirbaren, oder den als Glieder einer Hydrokette hervorragend electropositiven gehören, und dass der Grad ihres electropositiven Verhaltens zugleich die Reihenfolge ihrer Lichtempfindlichkeit bedingt. Es schien uns wünschenswerth einerseits nach etwaigen ferneren Belegen für dies Zusammentreffen zu suchen, andererseits auch das Verhalten der electropositivsten Metalle in nichtamalgamirtem Zustande zu prüfen.

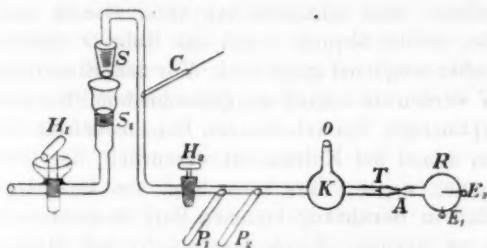
Ueber Methode und Resultate der nach diesen beiden Gesichtspunkten geführten Untersuchung erlauben wir uns im Folgenden zu berichten. Dieselbe wurde ausgedehnt auf die Metalle: Kalium, Natrium, sowie die aus diesen Bestandtheilen herstellbare, bei gewöhnlicher Temperatur flüssige

1) A. Righi, Beibl. 13. p. 41. 1889.

2) A. Righi, Mem. della R. Accad. di Bologna. (4) 10. p. 106. 1890
u. Estr. d. Atti del R. Instituto veneto di Scienze, 7. (6) p. 35. 1889.

Legirung, ferner auf die Amalgame von Rubidium, Kalium, Natrium, Lithium, Magnesium, Thallium, Zink.

Die für die Amalgame verwandten Recipienten waren von der Form der kürzlich beschriebenen¹⁾ und ihre Füllung geschah nach der früher angegebenen Weise.²⁾ Nur die Herstellung reiner Oberflächen der Alkalimetalle erforderte ein besonderes Verfahren, dessen Beschreibung zunächst folgen möge.



An das vermittelst des Hahnes H_1 von der Quecksilberluftpumpe absperrbare Schliffstück mit Quecksilberdichtung S_1 kann die aus Glas zusammengeblasene Vorrichtung SR angesetzt werden. R ist der zur schliesslichen Aufnahme des Metalls bestimmte Recipient, E_1 die eingeschmolzene Platinelectrode für die Zuleitung, E_2 die für die Erdleitung. Bei A wurde durch Herstellung einer starkwandigen Verengerung des Rohransatzes die Abschmelzstelle vorbereitet. T ist ein mit der Spitze von R abgewandtes Trichterchen, K eine Kugel, in welche das zu den Versuchen bestimmte Metall durch den Rohransatz O eingeführt wird. P_1 und P_2 sind zwei Röhrchen, in deren offenes Ende Palladiumdraht eingeführt wird, der als Kathode bei der Electroyse verdünnter Schwefelsäure gedient und sich mit Wasserstoff beladen hat. Nach Einführung der Drähte werden die Röhrchen zugeschmolzen. H_2 stellt einen gut schliessenden Hahn mit Fettabdichtung, C ein Rohr zum Lufteinlassen dar. Alle Glashäthe müssen vor dem Zusammensetzen mit verdünnter reiner Salzsäure, destillirtem Wasser und Alkohol gereinigt werden.

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 42. p. 564. 1891.

2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 41. p. 161. 1890.

Bevor der Apparat mit der Pumpe verbunden wird, ist *K* mit dem betreffenden Alkalimetall (beispielsweise Kalium) zu füllen.

Zu dem Zwecke schält man auf einer reinen Glasplatte von dem noch von Petroleum benetzten Stücken des Metalls die äussere Rinde mittelst eines Messers möglichst schnell ab und wirft dieselben sofort nach Beendigung dieser Operation in Benzin, welches die anhaftenden Reste von Petroleum auflöst. Man schneidet nun unter Benzin das Kalium in Stücke, welche bequem durch das Rohr *O* einführbar, im übrigen aber möglichst gross sind. Vor dem Einbringen in die Kugel *K* werden sie schnell mit getrocknetem Fliesspapier von den Hauptmengen des anhaftenden Benzins befreit. Schnelles Operiren, zumal bei Kalium, ist wesentlich, der Gefahr der Entflammung wegen; dass keine Spur von Feuchtigkeit mit dem Metall in Berührung kommen darf, braucht wohl kaum bemerkt zu werden. Ist *K* etwa zu $\frac{2}{3}$ mit Metallstücken locker gefüllt, so wird die Oeffnung *O* vor dem Gebläse zugeschmolzen. Das von dem Metall verdampfende Benzin kann mit der in dem Apparate vorhandenen Luft ein explosibes Gasgemenge bilden, man verschliesst daher zweckmässig *S* mit einem Kork, und leitet durch eine Oeffnung bei *C* mittelst eines über die Röhre gezogenen Gummischlauches einen Strom von Leuchtgas in den Apparat, während *O* vor der Gebläselampe geschlossen wird. (Reines Stickstoff- oder Wasserstoffgas wäre vielleicht dem Leuchtgase vorzuziehen, da letzteres infolge seines Kohlenoxydgehaltes auf Kalium reagiren könnte.) Dann wird bei *C* eine Capillare ausgezogen und dieselbe verschlossen, *S* in den Schliff *S₁* hingedreht, der Rand mit Quecksilber gefüllt und *H₁* geöffnet. Nun pumpt man den ganzen Apparat bis auf etwa $\frac{1}{2}$ mm Quecksilberdruck aus. Man bemerkt bald, dass bei diesem Grade der Verdünnung, trotz andauernden Pumpens, der Gasdruck nur wenig abnimmt; die Ursache liegt in der Einwirkung des metallischen Kaliums auf die Haut von Hydroxyd, mit der es sich beim Einbringen in den Apparat bedeckt hatte. Wasserstoff wird entwickelt, während Kaliumoxyd sich bildet. Man wartet einige Stunden, um diese Reaction wenigstens zum Theil vorübergehen zu lassen und erwärmt

dann bei geschlossenem Hahn H_2 die Kugel K über einer kleinen Spiritusflamme. Das Metall schmilzt bekanntlich schon bei sehr gelinder Erwärmung, doch hindert die starre Oxydschicht die Vereinigung der Stücke zu einer geschmolzenen Masse, nur vereinzelt brechen einige glänzende Kugelchen aus der grauweissen Hülle hervor. Man lässt erkalten und schafft die bei der Erhitzung in reichlicher Menge frei gewordenen Gase nach dem Oeffnen des Hahnes H_3 durch Auspumpen fort. Zweckmässig bleibt der Apparat mehrere Stunden sich selbst überlassen, damit durch die blanken Kaliumflächen die letzten Spuren von Sauerstoff und Wasserdampf beseitigt, bezw. in Wasserstoff übergeführt werden.

Es handelt sich nun darum, das Metall in einer einzigen zusammenhängenden Masse zu vereinigen. Zu dem Zwecke schliesst man H_1 und H_2 , öffnet die Capillare bei C , sodass Luft in den Raum zwischen den beiden Hähnen eintritt, entfernt durch Absaugen das Quecksilber bei S' und hebt S aus dem Schliffstücke heraus. Man hat so den Apparat in evakuirtem Zustande von der Pumpe gelöst. Jetzt wird wiederum K gelinde über der Alkoholflamme erwärmt, und durch starkes Schütteln das geschmolzene Metall zum Durchbrechen der Oxydschicht gebracht, aus der es bei jedem Stücke, wie aus einer Hülse völlig blank hervortritt. Es gelingt so leicht, dasselbe zu einer zusammengeflossenen Masse zu vereinigen. Ist dies geschehen, so wärmt man mit einer zweiten Flamme den Theil TAR des Apparates vor und lässt das flüssige Metall bei stark geneigter Stellung des Rohres TA gegen den Trichter T hinlaufen. Bei seinem geringen Gewicht geht es indessen nicht freiwillig durch die feine, als Filter dienende Oeffnung, sondern muss unter Anwendung von Druck hindurchgepresst werden. Man erwärmt deshalb, bei unveränderter Stellung des Apparates eine der Röhren P_1 oder P_2 ; der Palladiumdraht verliert dabei den occludirten Wasserstoff, durch dessen Druck das Metall glatt und mit reiner Oberfläche in den Recipienten R getrieben wird. Das Oxyd bleibt als eine blätterige Masse in K zurück. Sollte zugleich ein Theil des Metalls zurückgehalten sein, so hat man den zweiten Palladiumdraht

zur Reserve. Gewöhnlich ist das Metall in *R* theilweise erstarrt, durch schwaches Erwärmen schmilzt man es wieder und vereinigt es zu einem geschmolzenen Regulus, der den unteren Theil des Recipienten über der Electrode *E*₁ bedeckt. In dieser Lage lässt man es durch Erkalten starr werden. Dann bringt man durch Einsetzen des Schliffstückes *S* in *S*₁ den Apparat wieder an die Pumpe, verschliesst die Capillare *C* durch Zuschmelzen, füllt den Schliff *S*₁ mit Quecksilber und öffnet den Hahn *H*₁, während *H*₂ geschlossen bleibt. Nun wird der Raum *H*₁*H*₂ nach Möglichkeit bis zu der äussersten Verdünnung evaciirt, und dann erst *H*₂ geöffnet. Der gesammte, vom Palladium abgegebene Wasserstoff strömt in die Pumpe und muss durch fortgesetztes Evacuiren fortgeschafft werden. Ist ein Druck von einigen Hundertel Millimeter Quecksilber erreicht, so schmilzt man den Recipienten bei *A* ab; er ist nun zum Gebrauche fertig.

Es mag noch bemerkt werden, dass starke Erhitzung der Alkalimetalle im Vacuum zu vermeiden ist; es erfolgt sonst Verdampfung und Sublimation in Form von lebhaft farbigen dünnen Schichten, schliesslich chemischer Angriff auf das Glas.

Bei jeder Erwärmung schliesse man den zur Pumpe führenden Hahn, um im Falle des Zerspringens des Recipienten die Pumpe zu schützen.

Wie Kalium lässt sich auch metallisches Natrium behandeln. Leichter noch als bei den reinen Metallen erhält man blanke Oberflächen der aus ihnen gebildeten Legirung. Man trägt zu ihrer Darstellung in die Kugel *K* gereinigte Stücken von Kalium und Natrium im Verhältniss ihrer Aequivalentgewichte ein. Durch Erwärmen und Schütteln, wie im Vorigen beschrieben wurde, vereinigen sich die geschmolzenen Metalle zu einer Legirung, die auch nach dem Erkalten flüssig bleibt und, wie angegeben, leicht durch die Filtrirvorrichtung in den Recipienten hinüber gepresst wird; ist diese nicht zu eng, so lässt sich das Metall auch durch einfaches Neigen des Apparates nach *R* überführen. Dasselbe ist mit dem Auge nur durch die stärkere Wölbung seiner Oberfläche vom Quecksilber zu unterscheiden.

Der Versuch nach derselben Methode auch reine Oberflächen von Lithiummetall (electrolytisch aus geschmolzenem

Chlorlithium reducirt) herzustellen, scheiterte an der höheren Schmelztemperatur dieses Körpers. Das Glas des Recipienten erweicht sich, gibt dem äusseren Luftdrucke nach und zerspringt beim Erkalten.

Solche Metalle, die sich in evakuirten Glasrecipienten nicht wohl schmelzen lassen oder uns in freiem Zustande nicht zugänglich waren, konnten wir nur in ihren Amalgame untersuchen.

Rubidiumamalgam erhielten wir nach der Bunsen'schen Vorschrift durch Electrolyse einer concentrirten wässrigen Auflösung von Chlor-Rubidium bei Anwendung von Quecksilber als negativer, eines Platinblechs als positiver Electrode. Als Stromquelle diente eine Kette von 12 Zinkkohlenelementen. Die Bildung des Amalgams erfolgt sehr leicht; es erstarrt nach Unterbrechung des Stromes zu einer festen Masse, durch Abtrocknen, Schmelzen und Filtriren durch Fliesspapier trennten wir es nach Möglichkeit von dem anhaftenden Salze und behandelten es dann, wie es früher für Natriumamalgam auseinandergesetzt wurde. Das Chlорrubidium stellten wir aus natriumhaltigem — von Kahlbaum bezogenen — Salze durch Fällen mit Weinsäure, Glühen des Niederschlags und Neutralisation des ausgelaugten Rubidiumcarbonats mit Salzsäure dar. Ein Stückchen des erhaltenen Amalgams, mit einem Tropfen dieser Säure übergossen, gab eine Salzmasse, die, spectroskopisch geprüft, sich als fast reines Rubidiumsalz auswies; neben der (schwachen) Natriumlinie waren nur noch die des Calciums nach Verflüchtigung der Salzprobe eben bemerkbar.

Lithiumamalgam wurde theils auf demselben Wege wie das vorige, theils durch Auflösen von Lithium in erwärmtem Quecksilber dargestellt. Die Reaction erfolgt ähnlich wie bei Kalium und Natrium unter heftigem Spritzen. Auch Magnesium löst sich leicht in heissem Quecksilber auf; Thalium und Zinkamalgam erfordern bekanntlich zu ihrer Herstellung kein besonderes Verfahren.

Wir wenden uns nun zur Beschreibung derjenigen licht-electrischen Erscheinungen, die an den mit Kalium beschickten Recipienten wahrgenommen werden. Bei den zunächst zu besprechenden Versuchen war die Electrode E_1

mit dem negativen, die Electrode E_2 mit der Erde und dem positiven Pole der Zamboni'schen Säule verbunden. Die Herabminderung der Spannung am negativen Pol wurde durch ein Exner'sches Electroskop gemessen.

Den früher beschriebenen Amalgamen gegenüber zeigen die Kaliumflächen eine wesentlich gesteigerte lichtelectrische Empfindlichkeit, so zwar, dass man bei Versuchen in erleuchteten Räumen gezwungen wird, den Apparat in einen lichtdichten Kasten einzuschliessen, in welchem ähnlich wie bei einer photographischen Camera nur durch eine der Kaliumfläche gegenüber gelegene, kreisförmige verschliessbare Oeffnung dem Lichte Zutritt gegeben werden kann. Die Zuleitungen zu den Electroden E_1 und E_2 werden vermittelt durch Drähte, welche eingefügt in durchbohrte, gefirnisste Ebonitpropfen die Seitenwandungen des Kastens durchsetzen. So lange die Oeffnung geschlossen ist, zeigt das Electroskop eine bestimmte Divergenz der Aluminiumblättchen, entsprechend der an dem negativen Pole der offenen Säule herrschenden Spannung. Lässt man jetzt Licht in den Apparat durch Oeffnen des Verschlusses eintreten, so wird diese Divergenz mehr oder weniger je nach Intensität und Art des verwandten Lichtes herabgemindert.

Bei einigermaassen intensivem Lichte verschwindet die Spannung an dem negativen Pole der Säule ganz; dazu reicht hin: Tageslicht, Licht einer electrischen Glühlampe, Petroleum- oder Gaslicht, wenn die Lichtquelle sich in nicht allzugrosser Entfernung vom Apparate befindet. Bei der unten angeführten Beobachtungsreihe verwandten wir eine mit Reflector und Glascylinder versehene Petroleumlampe (Corridorlampe), die in verschiedenen Entfernungen von dem Apparate Aufstellung fand. (Reihe I. S. nächste Seite.)

Als wir die Petroleumlampe durch einen in 6 m Abstand entzündeten Magnesiumstreifen ersetzten, erhielten wir nunmehr an dem negativen Pol der Säule nur noch eine Spannung von 90 Volt, sodass also hier, entsprechend der grösseren Intensität des Magnesiumlichtes, eine Abnahme der Spannung von 122 Volt eintrat. (Für Petroleumlicht hatte sich bei gleicher Entfernung nur eine Abnahme von 17 Volt, vgl. Reihe I, ergeben.)

Reihe I.

Die lichtelectrische Entladung hervorgerufen durch Petroleumlicht.

Spannung des negativen Pole der Säule bei geschlossenem Kasten:

27,1 Scalenth. = 212 Volt

Entfernung d. Lichtquelle	Rest der Ladung Scalenth.	Volt	Abnahme
0,1 m	3,2	0,0	212 Volt
1,0 "	9,6	104	108 "
2,0 "	14,5	148	69 "
3,0 "	18,2	166	46 "
4,0 "	21,5	184	28 "
5,0 "	22,0	188	24 "
6,0 "	23,5	195	17 "

Entwarf man mittelst einer Glaslinse von 5 cm Durchmesser ein Bild einer in 6 m Abstand befindlichen Kerze auf der lichtempfindlichen Fläche, so sank die Spannung der Säule auf einen nicht mehr messbaren Betrag herab.

Auch das Licht der nichtleuchtenden Flamme des Bunsen'schen Brenners wirkt deutlich entladend, sowie auch das von der Balmain'schen Leuchtfarbe ausgesandte Phosphoreszenzlicht, wenn man die kurz zuvor mit Magnesiumlicht bestrahlte Substanz dem Apparate sehr nahe (4—5 cm) bringt und die Electricitätszufuhr von Seiten der Säule dadurch herabmindert, dass man in die Zuleitung zur Kaliumfläche einen Leinenfaden von etwa 10 cm Länge einschaltet.

Unter diesen Umständen kann es nicht Wunder nehmen, dass auch das Licht des Mondes den lichtelectrischen Entladungsvorgang einleitet.

Hiernach ist die obige Behauptung begründet, dass reine Oberflächen von Kalium in betreff ihrer lichtelectrischen Empfindlichkeit den früher untersuchten der Amalgame der Alkalimetalle bei weitem überlegen sind, wie diese ihrerseits die Oberflächen von Magnesium, Aluminium, Zink in derselben Beziehung übertrafen.

Es war mehr als wahrscheinlich, dass bei den neuen Apparaten besonders solche Lichtstrahlen sich bemerklich machten, die auch eine physiologische Intensität zeigen, d. h. dass hier eine Beschränkung der lichtelectrischen Wirkung auf das Ultraviolett auch nicht angenähert mehr besteht.¹⁾

1) Auch von E. Wiedemann und H. Ebert ist l. c. ein deutlicher

Wir haben diese Frage, inwiefern die verschiedenen Lichtarten bei dem Entladungsvorgange betheiligt sind, so weit unsere experimentellen Hülfsmittel reichten, zu entscheiden gesucht.

Zunächst brachten wir vor die Oeffnung des Dunkelkastens verschiedene gefärbte Glasplatten, durch welche wir das Tageslicht einfallen liessen. Hier zeigte sich, dass blaues Cobaltglas, die Wirkung nahezu ungeschwächt hindurchliess; ein rothes, durch Kupferoxydul gefärbtes Glas schwächte sie zwar beträchtlich, hob sie aber nicht vollends auf.

Dementsprechend wirkten auch durch Salzperlen gefärbte Flammen um so energischer auf die Kaliumfläche ein, je reicher das von den glühenden Metalldämpfen ausgesandte Licht an blauen Strahlen war. Bei den unten (Reihe II) angegebenen Versuchen befand sich der Bunsenbrenner in einer Entfernung von 35 cm von der lichtempfindlichen Fläche, und es wurde dafür gesorgt, dass der die Salzperle tragende Draht nur in den äussersten unteren Saum der Flamme eintauchte, um ein Erglühen desselben zu vermeiden. Das von einem glühenden Platindraht ausgesandte Licht wirkt nämlich an sich nicht unerheblich entladend.

R e i h e II.

Versuche mit verschiedenen Lichtquellen.

Spannung des negativen Pols der Säule bei geschlossenem Kasten:
27,1 Scalenth. = 212 Volt.

Art der Lichtquelle	Rest der Ladung Scalenth.	Ladung Volt	Abnahme in Volt
1) Nicht leuchtende Bunsenflamme	22,0	188	24
2) Letztere gefärbt durch: Thallium	17,2	160	52
3) " " " Lithium	20,8	181	31
4) " " " Kalium	7,0	80	132
5) " " " Natrium	12,3	127	85
6) Leuchtende Bunsenflamme	6,9	79	138
7) Petroleumlampe	3,2	0	212
8) Petroleumlampe und rothes Glas	21,2	188	29

Ordnet man die vorstehend verzeichneten Lichtquellen nach dem Grade ihrer Wirksamkeit, so ergibt sich diese aufsteigende Folge:

Einfluss von weniger brechbaren Strahlen auf electrische Funkenentladungen im Kohlensäuregase wahrgenommen.

- 1) nichtleuchtende Bunsenflamme,
- 2) Lampenlicht durch rothes Glas,
- 3) Lithiumflamme,
- 4) Thalliumflamme,
- 5) Natriumflamme,
- 6) Kaliumflamme,
- 7) leuchtende Bunsenflamme,
- 8) Petroleumlicht.

Es sei noch bemerkt, dass die Einführung von Chlor-rubidium in die Flamme des Bunsenbrenners nahezu die gleiche Abnahme hervorbrachte, wie die Einführung von Chlorkalium, dass dagegen die durch Chlorkupfer blaugrün gefärbte Flamme weit schwächer wirkte.

Die auf die angegebene Weise hergestellten farbigen Lichtarten können natürlich keineswegs alle als angenähert monochromatisch gelten. Reine Bedingungen sind nur bei Verwendung von Spectralfarben zu verwirklichen. Wir haben auch in diesem Sinne einige, wenn auch nur unvollkommene Versuche angestellt.

In einem verdunkelten Zimmer entwarfen wir mittelst eines weiten Spaltes und eines Glasprismas ein Sonnenspectrum und führten den Kaliumapparat in demselben entlang.

Es ergaben sich hier die in Reihe III verzeichneten Zahlen:

Reihe III.

Versuche mit Strahlen verschiedener Brechbarkeit. Spannung am Pol der Säule bei geschlossenem Kasten: 33,0 Scalenths. = 240 Volt.

Lichtart	Rest der Ladung Scalenths.	Volt	Abnahme in Volt
Roth	31,5	235	5
Orange	30,0	227	13
Gelb	28,0	217	23
Grün	20,5	179	61
Grünblau	8,5	94	146
Blau	7,3	83	157
Indigo	8,5	94	146
Violett	13,5	136	104
Ultra-Violett I	18,8	170	70
" " II	24,5	200	40
" " III	27,0	212	28

Bei diesen Versuchen war die Kaliumfläche metallisch mit dem negativen Pole der trockenen Säule verbunden.

Durch Einschaltung eines Leinenfadens in die Zuleitung liess sich für rothes Licht eine Abnahme der Spannung um 50 Volt erzielen; die rothen sichtbaren Strahlen üben daher zweifelsohne eine entladende Wirkung aus; ein Einfluss des Ultraroth war dagegen nicht zu bemerken.

Aus den mitgetheilten Zahlen geht hervor, dass für Licht, das durch Glas hindurchgegangen ist, das Maximum der Wirkung auf Kaliumflächen im Blau liegt. Die entladende Kraft nimmt dann rasch bis zum rothen Ende des Spectrums ab und erstreckt sich andererseits weit in den ultravioletten Theil hinein.

Mittelst eines hinter dem Prisma eingeschobenen Papierblättchens kann man leicht dem Lichte abwechselnd den Zutritt zum Apparate verwehren und freigeben. Hierdurch gerathen die Blättchen des Electroskopes in schwingende Bewegung; besonders auffallend gestaltet sich der Versuch, wenn man nur das eigentliche Ultraviolett in dieser Weise intermittirend einwirken lässt. Die Erscheinung ist gut als Demonstrationsversuch für die Existenz des dem Auge unsichtbaren ultravioletten Lichtes zu verwenden.

Wir hoffen durch Herstellung von Recipienten mit Quarzfenstern und Verwendung eines Quarzprismas auch die Wirksamkeit derjenigen Strahlen untersuchen zu können, die bei der beschriebenen Versuchsanordnung durch Absorption im Glase verloren gehen.

An einigen der lichtelectrischen Apparate hatten wir die Bemerkung gemacht, dass sie im Lichte bei Vertauschung der Pole der Zamboni'schen Säule eine deutliche (wenn auch verhältnissmässig geringe) Zerstreuung positiver Electricität zeigten. Besonders bei den die reinen Alkalimetalle enthaltenden Apparaten war diese Wirkung hervorgetreten. Man hätte glauben können, dass von solchen Flächen aus sich thatsächlich beide Electricitäten im Lichte leichter als im Dunkeln zerstreuten, doch war auch die Möglichkeit einer störenden Nebenwirkung nicht ausgeschlossen. Es konnte nämlich dieselbe Erscheinung dadurch zu Stande kommen, dass im Lichte ein Ueberfliessen negativer Electricität aus der der Alkalimetallfläche gegenüberstehenden Electrode E_2 zu dieser hin stattfand. Die Electrode bestand allerdings;

wie oben bemerkt, aus Platin, einer Substanz, bei der, wenn sie rein ist, durch Strahlen, die durch Glas hindurchgegangen sind, keine lichtelectrische Entladung eingeleitet wird. Doch war es möglich, dass entweder durch eine bei der Herstellung des Apparates erfolgte zufällige Berühring, oder durch Sublimation, eine Schicht von Alkalimetall sich auf derselben gebildet haben konnte. Von dieser aus musste dann im Lichte das Ueberströmen der negativen Electricität zu der positiv electrisirten Fläche erfolgen. Um zwischen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, verwandten wir bei einem der Apparate als Electrode E_2 einen quer durch den Recipienten gespannten dünnen Platindraht, der durch den Strom von einigen galvanischen Elementen in Gelbglüht versetzt und dadurch von allen anhaftenden flüchtigen Substanzen gereinigt werden konnte. Der Apparat wurde mit metallischem Kalium beschickt. Unmittelbar nach dem Ausglühen des Platindrahtes zeigte er die lichtelectrische Entladung nur, wenn die Kaliumfläche negativ electrisirt war, bei positiver Electrisirung blieb selbst bei Belichtung mit intensivem Magnesiumlichte jede Wirkung aus. Die lichtelectrische Entladung ist demnach bei reinen Versuchsbedingungen eine durchaus unipolare. (Der Apparat wird dabei am besten an dem zur Erde abgeleiteten Querdrahte aufgehängt. Befestigt man ihn an einer das Glas des Recipienten berührenden Klammer, so kann die mangelhafte Isolationsfähigkeit des Glases störend wirken. Schon wenige Minuten nach dem Ausglühen des Drahtes finden sich wieder schwache Anzeichen lichtelectrischer Entladung bei positiver Electrisirung, die im Laufe der Zeit immer stärker hervortreten; ein Beweis dafür, dass der Apparat Kaliumdämpfe enthält, die von dem abgekühlten Platindrahte allmählich aufgenommen werden.)

Bei den lichtelectrischen Versuchen unter Verwendung ultravioletten Lichtes ist von mehreren Forschern eine gewisse Zerstreuung positiver Electricität beobachtet worden. Es wäre wichtig, die Versuche daraufhin zu wiederholen, ob nicht auch hier eine unabsichtliche Belichtung von Körpern in der Nähe der bestrahlten Oberflächen stattgefunden hat, von denen aus dann negative Electricität zu den letzteren überströmen konnte. Mit dieser Vermuthung stimmt das

Resultat von A. Stoletow¹⁾ überein, nach welchem in der That die photoelectrische Zerstreuung im ultravioletten Lichte nur von negativ geladenen Oberflächen aus erfolgt — Die Frage, ob die lichtelectrische Entladung eine streng unipolare Erscheinung ist, darf wohl eine principielle Bedeutung beanspruchen.

Die Recipienten, welche Natrium enthalten, stehen in ihrer Wirksamkeit den Kaliumapparaten nicht unbeträchtlich nach, und die, in welche die flüssige Kalium-Natriumlegirung eingeführt wurde, halten etwa die Mitte zwischen beiden.

Die meisten der oben angeführten Versuche lassen sich auch mit diesen Apparaten anstellen, nur sind hier die Lichtquellen geringerer Intensität, wie Gas- und Lampenlicht, der lichtempfindlichen Fläche näher zu rücken.

Die Natriumapparate eignen sich ferner, wie noch bei läufig bemerkt werden mag, sehr gut und zwar unter Verwendung von Petroleumlicht zur Ausführung der früher von uns beschriebenen Versuche, betreffend die Hemmung der lichtelectrischen Entladung im magnetischen Felde.²⁾

Die Amalgame, welche zu den weiteren Versuchen verwandt wurden, waren so reich an gelöstem Metall, dass sie bei Zimmertemperatur eben erstarren. Die Dichte des in den Recipienten eingeschlossenen Gases dürfte bei den verschiedenen Apparaten von etwa gleicher Ordnung gewesen sein. Sie alle zeigten vor dem Einführen des Amalgames beim Hindurchleiten des Stromes eines kleinen Inductoriums lebhaft grünes Kathodenlicht, während von dem Anodenlichte nur noch Spuren wahrzunehmen waren. Um einen ungefährnen Vergleich zu ermöglichen, waren die Apparate von möglichst gleicher Grösse und Form gewählt.

Ihrem actinoelectrischen Verhalten nach geordnet ergeben sie folgende Reihe:

Rb, K, Na, Li, Mg, Tl, Zn.

Auf Rubidiumamalgam wirkt das Licht einer Petroleumlampe bereits aus ziemlicher Entfernung (etwa 30—40 cm); um die gleiche Abnahme bei Kalium- und Natrium-Amalgam

1) A. Stoletow, Beibl. 14. p. 322. 1890.

2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 41. p. 166. 1890.

zu erzielen, musste die Lichtquelle bis auf etwa 10 cm der lichtempfindlichen Fläche genähert werden. Auch Lithiumamalgam wurde durch Lampenlicht, wenn auch schwächer, so doch noch deutlich entladen; eine geringe Einwirkung war selbst bei Magnesiumamalgam zu erkennen. Die gleiche Reihenfolge dieser fünf Stoffe ergab sich auch bei Wiederholung der Versuche im Tageslichte. Thallium- und Zinkamalgam versagten dagegen bei Verwendung von Lampenlicht ganz; auch helles Tageslicht genügte nicht, die Erscheinung hervorzurufen¹⁾), dagegen trat sie im Sonnenlicht mit voller Deutlichkeit ein. Ein sicherer Unterschied zwischen diesen beiden letztgenannten Stoffen konnte nicht festgestellt werden.

Aus diesen Ergebnissen lässt sich der Schluss ziehen, dass ein Zusammenhang der Lichempfindlichkeit mit kleinen Werthen des Atomgewichtes, an den man vielleicht bei der hohen Wirksamkeit von Li, Mg, Na denken könnte, nicht besteht. Von diesem Gesichtspunkte aus haben wir die Untersuchung des Rubidium für erforderlich gehalten; das Verhalten desselben widerlegt jene Vermuthung.

Ein mit reinem Quecksilber gefüllter Apparat erweist sich bei Bestrahlung mit Sonnen- oder künstlichem Lichte durchaus unwirksam. Das lichtelectrische Agens ist daher zweifellos das im Quecksilber gelöste Metall. Dem entspricht auch die im Verlaufe der Untersuchung häufig festgestellte Thatsache, dass die Lichempfindlichkeit einen um so höheren Grad erreicht, je reichhaltiger an fremdem Metall das Amalgam gewählt wurde.

Die Resultate der mitgetheilten Veruche lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Die lichtelectrisch wirksamsten Metalle ordnen sich ihrer Lichempfindlichkeit nach in folgender Weise:

Reines Kalium, Legirung von Kalium und Natrium,

Reines Natrium;

dann folgen die Amalgame von:

Rb, K, Na, Li, Mg, (Tl, Zn).

1) Dass Tageslicht, welches nicht durch Glas hindurchgegangen ist, sich auf Zinkamalgam wirksam erweist, steht hiermit natürlich nicht im Widerspruch.

Ordnet man dieselben Stoffe nach der Grösse der Potentialdifferenzen, die sie als Glieder einer Hydrokette zeigen, so ergibt sich die gleiche Reihenfolge.

Die ersten Glieder der Reihe besitzen eine sehr hohe Empfindlichkeit sowohl gegenüber der Intensität, als auch der Wellenlänge des bestrahlenden Lichtes; für erstere kann als ungefähre Grenze die Strahlung einer Kerze in 6 m Abstand, für letztere der Bereich des spectralen Roth angegeben werden; je näher ein Glied der Reihe dem Anfangsteht, um so grösser ist die Wellenlänge desjenigen Lichtes, das hinreicht, die lichtelectriche Entladung zu bewirken. Doch liegt auch für Kalium noch das Maximum der Wirkung im Blau. Eine Zerstreuung positiver Electricität von den genannten Substanzen während der Belichtung konnte — bei reinen Versuchsbedingungen — nicht nachgewiesen werden.

Wolfenbüttel, im März 1891.

II. Beiträge zur Theorie des Secundärelementes; von Franz Streintz.

(Hierzu Taf. II Fig. 1—6.)

(Dritte Mittheilung.)¹⁾

7. Ueber die Capacität und den Wirkungsgrad von Elementen mit verschiedenen grossen positiven Platten.

Zu diesem Zwecke wurden Versuchselemente aus Platten der Electrical Power Stor. Comp., welche die Accumulatorenfabrik Getz und Odendall in Wien vor einem Jahre geliefert hatte, hergestellt. Die Platten wurden derart zersägt, dass die Schnitte durch die Mitte der quadratischen Füllgitter gingen. Dadurch erhielt man Stücke mit unverletzter Füllmasse und vollständigem Bleirahmen. Ein in der Mitte der so erhaltenen Stücke befindlicher Bleistreifen wurde nicht unmittelbar am Rahmen abgeschnitten, sondern, nachdem er von der umgebenden Füllmasse losgelöst war, in einer Länge von etwa 10 cm an der Electrode belassen; er diente als Zuleitung.

Die positive Platte hatte eine Dicke von 0,549 cm, die negative eine solche von 0,433 cm, die Länge einer Masche des Gitters betrug 0,637 cm. Je eine positive und eine negative Platte wurde zu einem Elemente vereinigt; die Bleistreifen, welche die Zuleitung vermittelten, waren zum Theil in Glasrörchen eingekittet, die wieder in gefirnißte Brettchen eingelassen waren. Die Brettchen bildeten die Deckel von rechteckigen Glasgefäßen, welche ungefähr 100 ccm Schwefelsäure im Volumenverhältnisse 1:5 aufnahmen. Die Platten standen parallel zu einander und hatten eine gegenseitige Entfernung von 1,5 cm. Ein kleines, kreisrundes Loch im Deckel eines jeden Elementes diente zur Aufnahme eines Glashebers, welcher die Leitung zu einer

1) F. Streintz, Wied. Ann. 38. p. 344. 1889 u. F. Streintz u. G. Neumann, Wied. Ann. 41. p. 97. 1890.

grossen, allen Elementen gemeinschaftlichen, amalgamirten Zinkplatte in einem Gefäss von Schwefelsäure gleicher Concentration vermittelte.

In Verwendung standen drei Elemente, bei welchen sich das Verhältniss der Oberflächen beider Platten in folgender Weise gestaltete.

Element I besass eine positive Platte, bestehend aus 5×5 .

Element II eine solche aus 5×6 ,

Element III endlich eine aus 6×6 Maschen des Füllgitters; die negativen Platten waren sämmtlich von gleicher Oberfläche und bestanden aus je 6×6 Maschen. Das Gewicht einer positiven Platte von den Dimensionen 6×6 wurde zu 60,343 g, jenes einer negativen Platte zu 45,279 g gefunden.

Die zur Bestimmung der Capacität und des Wirkungsgrades erforderlichen Grössen P' , p' , J' , beziehungsweise P , p , J resultirten aus der bereits in der ersten Mittheilung beschriebenen Methode.

Um aber die gleichzeitige Untersuchung aller drei Elemente zu ermöglichen, diente die Einrichtung des nachstehend beschriebenen Schaltbrettes.

Auf einem starken Brette aus hartem Holz standen 30 Siegellackstangen, auf welche mit Quecksilber gefüllte Glasnäpfchen gekittet waren. Je zehn solcher Näpfchen gehörten einer Gruppe an und waren für die Untersuchung eines Elementes bestimmt. Fig. 1 stellt eine solche Gruppe dar. Auf den breiten Rändern des Brettes lagen ausgespannt drei starke Kupferdrähte α , α' und β , unter welche Siegellackstücke gelegt waren. Die Näpfchen 1 und 6 stehen mit zwei zur Ladung dienenden grossen Secundärelementen (Typus Farbaky-Schenek), 7 und 8 mit dem zu unteruchenden Elemente, 4 mit Kupferdraht α , 5 mit α' , 9 und 10 mit β in Verbindung. Zwischen 2 und 7 vermittelte ein kurzer Draht, zwischen 3 und 8 eine Spule von bekanntem Widerstand ϱ die Leitung. Die zwei benachbarten Kupferdrähte α und α' führten zu einer Spiegeltangentenbussole A , die dritte, β , zu dem Näpfchen c einer Umschaltevorrichtung. Das Näpfchen d dieser letzteren war mit der bereits erwähnten amalgamirten Zn-Platte und mit dem negativen Pole eines nor-

malen Clark-Elementes, Näpfchen e mit dem positiven Pole desselben, a und b endlich mit einem empfindlichen Wiedemann'schen Spiegelgalvanometer V (Hartmann und Braun) und einem Widerstandsetalon (1 Megohm in Abtheilungen von 0,1 nach Carpentier) in Verbindung.

Zur Ladung der Elemente erfolgte die Verbindung der Näpfchen 1 mit 2, und 3 mit 6 durch Kupferbügel mit isolirenden Handhaben. Sollte der Ladungsstrom eines Elementes durch die Tangentenbussole geleitet werden, dann verband man, während die Verbindung 1 mit 2 bestehen blieb, 3 mit 4, 5 mit 6.

Zur Entladung der Elemente überbrückte man die Näpfchen 2 und 3, wenn der Strom nicht durch die Bussole, hingegen 2 mit 4, 3 mit 5, wenn er durch dieselbe geführt werden sollte.

Der Widerstand der Bussole war verschwindend gegenüber dem Leitungswiderstände ϱ .

Zur Bestimmung der Potentialdifferenzen zwischen Zink und den einzelnen Platten der Elemente diente, nachdem die Umschaltevorrichtung die Stellung $a-d$, $b-c$ erhalten hatte, die Verbindung von 7 mit 9, beziehungsweise 8 mit 10, sowohl für die Ladung (zur Ermittlung von P' und p'), als für die Entladung (P und p). Das Galvanometer wurde mit einem der Normalelemente, die sich in einem mit Sägespänen gefüllten Kistchen befanden, welches außerdem ein Thermometer enthielt, geaicht. (Stellung der Umschaltevorrichtung, $a-d$, $b-e$). Ungefähr 100 Striche entsprechen bei einem Widerstande von 0,5 Megohm einem Volt. Dabei betrug die Entfernung des Spiegels von der Scala 350 cm.

Die Aichung der Bussole erfolgte durch Compensation eines Clarkelementes. 100 Scalentheile entsprechen einer Stromstärke von 0,219 A.

Die electromotorische Kraft des Elementes während der Ladung ist durch:

$$\epsilon' = P' - p'$$

gegeben. Bedeutet J' die Stromstärke, bei welcher geladen worden, dann erhält man:

$$P' - p' = K' - J' w',$$

wenn unter K' die Klemmenspannung, unter w' der Widerstand des Elementes verstanden wird. Das Product $J^2 w'$ gibt die im Elemente in der Secunde entwickelte Wärmemenge — die sogenannte Joule-Wärme — an. Da die zur Erzeugung dieser Wärme erforderliche Energie im Elemente verbraucht wird, so muss dieselbe bei Beurtheilung der an dasselbe abgegebenen Energie berücksichtigt werden. Der Ausdruck für die von der Stromquelle in der Zeit t' an den Polen abgesetzte Energie ist mithin: $K' J' t'$.

Bei der Entladung gilt unter Anwendung gleicher Zeichen für die vorkommenden Grössen nach Hinweglassung der Accente:

$$P - p = K + Jw;$$

aus dem oben angegebenen Grunde wird die bei der Entladung geleistete Arbeit durch:

$$(P - p) J \cdot t$$

auszudrücken sein, sodass demnach der Wirkungsgrad des Elementes durch den Quotienten:

$$\eta = \frac{(P - p) J \cdot t}{K' J' t'}$$

gegeben ist, wenn man über t und t' in entsprechender Weise verfügt.

Wäre die von Fuchs angenommene Methode eine strenge, so würden die aufgestellten Gleichungen zur Bestimmung des jeweiligen Widerstandes w benutzt werden können, da man in die Lage versetzt wäre, die von der electro-motorischen Kraft bei offenem Stromkreise abweichende, jedoch maassgebende electromotorische Kraft im geschlossenen Kreise kennen zu lernen. Doch erhielt man auch hier mit der Stromstärke J variirende Werthe, welche zwischen 0,12 und 0,16 Ohm gelegen waren. Gegenüber dem Leitungswiderstände ϱ war w immerhin klein und da es sich bei den Messungen zunächst darum handelte, die verschiedenen Elemente auf ihre Capacität und ihren Wirkungsgrad zu vergleichen, so wurde gewöhnlich auf die Ermittelung von K' verzichtet und die Näherungsformel:

$$\eta = \frac{(P - p) J \cdot t}{(P' - p') J' t'}$$

in Anwendung gebracht. Man wird ihr dieselbe Berechtigung zugestehen können, welche der bisher gewöhnlich angewandten Gleichung:

$$\eta = \frac{KJt}{K'J't}$$

zukommt.

Unter Capacität eines Secundärelementes versteht man die Energie, ausgedrückt in Stundenwatts, welche dasselbe bis zu einem gewissen Verluste der anfänglichen Stromstärke abzugeben im Stande ist. Gewöhnlich wird diese Energie bezogen auf ein Kilogramm des Gesammtgewichtes des Elementes. Da die verschiedenen Bestandtheile der untersuchten Versuchselemente in Rücksicht auf ihre Massen mit den praktisch in Verwendung stehenden Secundärelementen nicht harmoniren, so erschien es vortheilhaft, die Capacität auf ein Kilogramm des Plattengewichtes zu beziehen.

Bevor ich daran gehe, die Resultate, welche die Bestimmungen von Capacität und Wirkungsgrad ergeben, mitzuteilen, erscheint es geboten, auf einige Erscheinungen, die sich bei der Ladung und Entladung abspielen, sofern sie nicht schon in der ersten Mittheilung berührt wurden, näher einzugehen; es können nämlich diese Erscheinungen Ursachen einer Reihe von Fehlerquellen bei der gestellten Aufgabe bilden.

Zunächst ist es die Gaspolarisation, deren Einfluss kurz besprochen werden soll. Als normale electromotorische Kraft eines Elements ist die Spannung zwischen Bleisuperoxyd und metallischem Blei anzusehen. Aus der Untersuchung, welche über das electromotorische Verhalten verschiedener Bleiverbindungen angestellt wurde, geht hervor, dass dieselbe durch die Differenz 2,47—0,45 Volt gegeben ist, also rund 2 Volt beträgt. Während der Ladung eines Elementes wird durch das Auftreten der Gaspolarisation dieser Werth bedeutend überschritten. Die O-Polarisation superponirt sich zur electromotorischen Kraft des PbO_2 , die H-Polarisation zu jener des Pb. Auf diese Weise kann die Potentialdifferenz an den Polen eines Elementes bis auf 2,9 Volt steigen. In dem Augenblicke, als die Ladung unterbrochen und das Element im offenen Zustande sich selbst überlassen wird, sinkt die

electromotorische Kraft desselben auf 2,3 Volt herab, um dann zunächst rascher, dann langsamer dem normalen Werth zuzustreben. Fig. 2 gibt den Verlauf der Gaspolarisation jeder Platte gegen die neutrale Zinkplatte an. In derselben sind die Zeiten von der Unterbrechung des ladenden Stromes (0 Min.) gerechnet als Abscissen, die entsprechenden Potentialdifferenzen als Ordinaten verzeichnet. Die höher gelegene Curve gibt das Verhalten der PbO_2 -Platte, die tiefer gelegene die der Pb-Platte an. Der jeweilige Abstand beider Curven voneinander entspricht der electromotorischen Kraft des Elementes.

Zur Zeit 0 Min. findet ein plötzliches Fallen der oberen, ein Aufsteigen der unteren Curve statt, wodurch die Potentialdifferenz zwischen den Platten von 2,87 V. auf 2,29 V. sinkt. Es beweist dies, dass die electromotorische Wirkungskraft der in Atomen aus dem Electrolyte scheidenden Gase eine erhöhte ist. Im weiteren Verlaufe erhielt sich die mit H versehene negative Platte auf dem constanten Niveau, welches dem metallischen Pb entspricht, während die mit O versehene positive Platte sich gewissermaassen asymptotisch der normalen Spannung nähert. Die unmittelbar nach vollendeter Ladung auftretende hohe electromotorische Kraft — the high initial E. M. F., wie sie Gladstone nennt, — ist also, wie dies schon seinerzeit betont wurde, der O-Polarisation der Superoxydplatte zuzuschreiben. Da der gasförmige O allmählich von der Platte in die Flüssigkeit diffundirt, so ist die Beobachtung von Gladstone und Hibbert¹⁾, wonach die Abnahme mit der Zeit von der Concentration der Schwefelsäure abhängt, im Einklange. Wird nun ein vollständig geladenes oder „überladenes“ Element sogleich entladen, dann muss die anfängliche hohe Potentialdifferenz um so rascher verschwinden, je grösser die bei der Entladung angewendete Stromstärke ist, da die in der Zeiteinheit an der positiven Platte entwickelte H-Menge und damit auch der Verlust an O durch Verbrennung derselben zu H_2O davon abhängen wird.

Sollen die Resultate untereinander vergleichbar werden,

1) Gladstone u. Hibbert, Phil. Mag. Vol. 30. p. 168. 1890.

dann sind die Entladungen stets bis zu einer und derselben Abnahme der anfänglich beobachteten Stromstärke vorzunehmen; es ergibt sich daraus, dass die besprochene Erscheinung für die genaue Bestimmung der Zeitdauer, durch welche entladen werden soll, eine Schwierigkeit bildet. Liegt zwischen Ladung und Entladung keine oder nur eine kurze Pause, so ist der Entladungsstrom in den ersten Minuten seiner Dauer nicht vollkommen stationär, sondern er nimmt, bedingt durch die Veränderung von P , bedeutend rascher ab, als dies im späteren Verlaufe der Fall ist. Diese Abnahme dauert bei den angewendeten Intensitäten vier bis sechs Minuten und beträgt fast 10 Proc. des ursprünglichen Werthes der Stromstärke.

Wird hingegen die Entladung erst nach mehrstündiger Ruhe des geladenen Elementes vorgenommen, dann ist die Zeit, in welcher eine raschere Abnahme der Intensität erfolgt, kaum abzuschätzen.

Es wurde in allen Fällen versucht, die nach Ablauf der Polarisation eintretende stationäre Stromstärke so scharf als möglich zu bestimmen; die Entladung wurde sodann bis zur Abnahme von 10 Proc. dieses Werthes geführt.

Um verlässliche Werthe für den Wirkungsgrad zu erhalten, ist ferner zu vermeiden, dass bei der Ladung eine lebhafte Gasentwicklung auftrete, da dadurch eine Verschwendug von Energie herbeigeführt wird. Die Beobachtungen ergaben übereinstimmend, dass eine sparsame Entwicklung von Gasblasen an der positiven Platte beim Vorrücken der Ladung stattfand, während an der negativen Platte vollständige Ruhe herrschte. Das Product $(P' - p')J'$, welches den jeweiligen Werth der aufgewendeten Watts angibt, bleibt in dieser Periode in befriedigendem Grade constant.

Plötzlich tritt an der negativen Platte lebhafte H-Entwicklung auf — dieselbe ist mit einem leise gurgelnden Geräusch verbunden — p' sinkt beträchtlich — zuweilen unter die Spannung des Zn —, in noch höherem Maasse J' und damit auch der Ausdruck für die Energie. Dies ist der Moment, in welchem die Ladung als beendet anzusehen ist; denn fährt man mit ihr nach erfolgtem Eintritte dieser Er-

scheinung fort, so findet man eine nicht unwesentliche Verringerung des Wirkungsgrades.

Vor Beendigung der Ladung entspricht mithin der Zunahme von $(P' - p')$ eine gleiche Abnahme von J' , nach Beendigung derselben wird diese Beziehung durch die mit der Gasentwickelung verbundene Vergrösserung des Widerstandes w' gestört.

Aus dem Gesagten ergibt sich die Nothwendigkeit, die Elemente in der letzten Phase der Ladung sorgfältig zu überwachen. Man kann sich übrigens überzeugen, dass auch Ladungen, welche nicht bis zu dem Eintritte der lebhaften H Entwicklung erfolgten, keine geringeren Beiträge bei Bestimmung des Wirkungsgrades liefern, als solche, bei denen dieser Augenblick abgewartet wurde.

Eine dritte Schwierigkeit wurde schon von W. Kohlrausch¹⁾ hervorgehoben. Sie besteht darin, dass die Bestimmungen des Wirkungsgrades zu fehlerhaften Ergebnissen führen, wenn die vorhergehenden Ladungen und Entladungen mit stärkeren Strömen erfolgt waren. Es hängt diese Erscheinung mit der insbesondere bei der Entladung auftretenden Gaspolarisation zusammen. Bei kräftigeren Strömen ist die Bedeckung der Electroden mit Gasen eine dichtere; dadurch wird die normale Potentialdifferenz mehr herabgedrückt — die entgegengesetzte Erscheinung wie bei der Ladung — als dies bei schwächeren Strömen der Fall ist. Als Folge davon ergibt sich ein grösserer Verlust an Stromstärke, als bei voller Ausnutzung der beiden Platten durch die chemischen Veränderungen an denselben erlitten wird. Es wird somit der Rückstand vergrössert, welcher sich zu der nachfolgenden schwächeren Ladung addirt und den Wirkungsgrad des Elementes scheinbar erhöht. In der That ergeben sich, wenn in dieser Weise vorgegangen wird, Werthe für den Wirkungsgrad, welche die Zahl Eins erreichen.

Um von diesem schädlichen Einflusse möglichst befreit zu sein, wurde bei Bestimmung des Wirkungsgrades folgender Weg eingeschlagen. Das Element erhielt zunächst bei einer gewissen Stromintensität viele Stunden über den Zeit-

1) W. Kohlrausch, Wied. Ann. 34. p. 588. 1888.

punkt hinaus, bei welchem die negative Platte H abgab, Ladung. Dann wurde es bei demselben Widerstand in der Leitung bis zur Abnahme von zehn Proc. der stationären Stromstärke entladen. Diese Entladung, bei welcher in entsprechenden Zwischenräumen, die jedoch eine Stunde nie überstiegen, p und J gemessen worden waren, diente zur Bestimmung der Capacität. Am folgenden Tage erfolgte eine neuerliche Ladung bei derselben Stromstärke, jedoch höchstens nur solange, bis die H -Abgabe begann; den Schluss bildete eine unter gleichen Verhältnissen vorgenommene Entladung, die sich unmittelbar an die Ladung schloss. Nur wenn die Ladung bei geringer Stromstärke und mithin mit Aufwand von viel Zeit geschah, musste zwischen beiden Vorgängen eine Pause von zwölf Stunden eintreten. Die während der zweiten Ladung und Entladung ermittelten Größen dienten zur Bestimmung des Wirkungsgrades.

Da es von Interesse sein dürfte, zu erfahren, wie sich Elemente, bei welchen die Oberfläche der positiven Platte verkleinert war, im letzten Stadium der Entladung verhalten, so sollen einige Angaben darüber gemacht werden. Aus Gründen der Uebersichtlichkeit und Kürze will ich mich dazu wieder der graphischen Darstellung bedienen.

Das Element III, bei welchem beide Platten von gleicher Ausdehnung sind, lieferte die Curven Fig. 3. Der Zeit „0 Min.“ war eine Entladungsdauer von 4 St. 30 Min. vorangegangen. Die Stromstärke hatte bis dahin bereits zehn Proc. des stationären Werthes — also gezählt nach Ablauf der 0-Polarisation — eingebüßt; sie betrug noch 0,249 A. und sank in weiteren 85 Min. auf den verschwindenden Rest von 0,027 A. herab. Die Zwischenwerthe für J sind den Werthen für die Potentialdifferenzen ($P-p$) in Klammern beigesetzt. Der Verlauf dieser Erscheinung ist der bekannte. Hervorgehoben sei nur, dass von dem Augenblicke an, in welchem p von der Spannung, welche dem Bleisulfat zukommt, in jene des Superoxydes überschlägt, auch P ansteigt. Die positive Platte hatte sich während der Entladung mit H bedeckt, wodurch ihre Spannung nachtheilig beeinflusst wurde. Damit, dass durch das Wachsthum von p , J auf ein Minimum sinkt, wird die positive Platte von neu hinzutretendem

Wasserstoff gewissermaassen entlastet und nähert sich daher wieder dem normalen Werthe.

Element II (Verhältniss der wirksamen Oberflächen 5:6) zeigt ziemlich analoges Verhalten (Fig. 4). Die angewendete Stromstärke war eine geringere.

Im Elemente I hingegen (Verhältniss der wirksamen Oberflächen 25:36) ist die Erscheinung eine wesentlich geänderte (Fig. 5). Zur Zeit „0 Min.“ hatte die Entladung 3 St. 20 Min. gedauert, wodurch J um zehn Proc. des statio-nären Anfangswertes gesunken war (0,249 A.). Ein eigent-licher Abfall der Spannung ist nicht zu beobachten, sondern nur ein allmähliches Sinken von P . Nach 80 Min. ist die Stromstärke erst auf 0,118 A. gebracht. Der Einfluss der Gaspolarisation charakterisiert sich durch das Verhalten der p -Curve.

Ein noch merkwürdigeres Bild erhält man durch Entladung desselben Elementes bei geringer Stromstärke (Fig. 6). Zur Zeit der Erschöpfung der positiven Platte ist die durch den schwächeren Strom besser ausgenützte negative nicht mehr im Stande, sich zu erholen; der restliche Strom von 0,09 A. bedeckt sie daher mit Superoxyd. Dadurch kommt die positive Platte in die Lage, sich zu erholen, wodurch ein Endzustand erreicht wird, welcher jenem bei der zuerst besprochenen Entladung gleichkommt.

Jeder Bestimmung des Wirkungsgrades ging, wie schon auseinander gesetzt, eine entsprechende Bestimmung der Capacität voran. Es wurden mit den drei Elementen im Ganzen zwanzig Ladungen und eben so viel Entladungen vorgenommen. Die erste Ladung der Elemente dauerte 30 Stunden; es war dies nothwendig, um die negativen Platten, welche obwohl formirt, doch die kürzlich besprochenen Eigenschaften des an der Luft gelegenes Bleies zeigten, betriebsfähig zu gestalten.¹⁾

Trotzdem ergab sich der Wirkungsgrad bei den ersten

1) Es möge an dieser Stelle aufmerksam gemacht werden, dass die Fabrikanten von Secundärelementen besser daran thun, nicht formirte negative Platten zu versenden, da die zur Formirung aufgewendete Energie bei Versendung der trockenen Bleiplatten durch den Oxydationsprocess des Bleies doch wieder verloren geht.

Versuchsreihen etwas geringer, als bei den späteren. In der nachstehenden Tabelle sind die Resultate der Versuchsreihen 13, 15 und 17 zusammengestellt; dieselben dienen zur Bestimmung der Capacität.

Die römischen Ziffern geben die Nummern des Elementes an; hierauf folgen in der zweiten Columne die Stromstärken J in Ampere, bei welchen die Entladungen vorgenommen wurden. Man findet überall drei Werthe dafür eingetragen und zwar gibt jede erste Zahl die Intensität unmittelbar nach Schluss des Elementes an, die zweite entspricht dem zuerst eingetretenen stationären Werthe derselben, wurde also, wie bereits erwähnt, 4—6 Minuten nach dem Anfangswerthe beobachtet, die dritte endlich dem unmittelbar vor Oeffnen des Elementes erzielten. Die zwei weiteren Colonnen enthalten die den jeweiligen J entsprechenden Potentialdifferenzen P und p in Volts, die vierte die Angaben für die Arbeitsintensität in Watts (EJ). Hierauf folgen die Zeiten, während welcher entladen wurde, ferner die den Elementen im Ganzen entnommenen Wattstunden (EJt) und schliesslich die auf ein Kilogramm der Plattenmasse berechnete Capacität k .

Tabelle zur Bestimmung der Capacität.

Nr.	J	P	p	EJ	t	EJt	k
I	0,157	2,715	0,545	0,342			
	0,144	2,540	0,540	0,289	9 ^h 24 ^m	2,534	29,06
	0,130	2,385	0,590	0,233			
	0,270	2,620	0,490	0,585			
	0,238	2,465	0,485	0,472	4 43	2,043	28,43
	0,214	2,320	0,540	0,382			
	0,322	2,705	0,510	0,707			
	0,280	2,465	0,505	0,549	3 26	1,746	20,03
	0,252	2,320	0,560	0,444			
II	0,162	2,785	0,540	0,363			
	0,146	2,550	0,540	0,295	10 ^h 37 ^m	2,942	30,71
	0,132	2,465	0,630	0,241			
	0,274	2,750	0,495	0,619			
	0,238	2,470	0,485	0,478	5 27	2,425	25,37
	0,214	2,380	0,595	0,382			
	0,328	2,785	0,510	0,745			
	0,284	2,485	0,505	0,563	4 06	2,161	22,61
	0,256	2,380	0,575	0,463			

(Fortsetzung der Tabelle von voriger Seite.)

Nr.	J	P	p	EJ	t	EJt	k
III	0,162	2,765	0,535	0,363	11 ^b 18 ^m	3,081	29,17
	0,145	2,530	0,530	0,290			
	0,131	2,450	0,640	0,238	5 39	2,521	23,86
	0,274	2,750	0,490	0,619			
	0,239	2,485	0,480	0,479			
	0,215	2,365	0,595	0,380			
	0,324	2,695	0,505	0,710	4 28	2,315	21,91
	0,282	2,460	0,505	0,553			
	0,254	2,395	0,635	0,446			

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Capacität der Elemente mit abnehmender Stromstärke zunimmt. Es ist diese Thatsache in vollem Einklange mit anderen Erscheinungen, welche bei der Electrolyse auftreten.

Ferner ergibt sich, dass k mit der Verkleinerung der positiven Platte bis zu einem Maximum zunimmt. Ob dieses Maximum beim Elemente II erreicht ist, lässt sich natürlich nicht entscheiden; es ist nicht ausgeschlossen, dass ein noch günstigeres Verhältniss der wirksamen Oberflächen erzielt werden könne.

Ich kann hier nicht unterlassen, um etwaigen Missverständnissen vorzubeugen, eine Bemerkung über die Construktion von Elementen, bei denen die positive Oberfläche verkleinert werden soll, einzuschalten. Bei der geringen Ausdehnung, welche die Platten in dem Versuchselement besassen und bei der verhältnissmässig grossen gegenseitigen Entfernung derselben (1,5 cm) war die Annahme berechtigt, dass die Stromdichte an allen Partien der einander zugekehrten Seiten fast dieselbe ist. Anders müsste sich dies bei Verwendung grosser Platten in geringer Entfernung gestalten. Die über den Rand der positiven Platten ragenden Stücke der negativen würden wegen der geringen Stromdichte, die sie erhalten, an den Ladungs- und Entladungsprozessen nicht entsprechenden Anteil nehmen, sodass sie zum grössten Theil nur als Ballast zu betrachten wären. Um diesem Uebelstande vorzubeugen, könnte man etwa die Platten in concentrischen Flächen von Cylindermanteln anordnen und zwar in der Weise, dass der innerste Mantel

aus einer positiven, der äusserste aus einer negativen Platte bestünde.

In der nächsten Tabelle findet man die Ergebnisse der 14., 16. und 18. Versuchsreihe, welche zur Ermittelung des Wirkungsgrades angestellt wurden. Die bei der Ladung gemessenen Grössen sind durch Accente bezeichnet. Für J' , P' und p' sind gleichfalls je drei Werthe angegeben. Dieselben beziehen sich auf die zu Beginn, in der Mitte und bei Beendigung der Ladung gefundenen Grössen. η ist der Quotient $EJt/E'J't'$.

(Siehe Tabelle zur Bestimmung des Wirkungsgrades nächste Seite.)

Der Wirkungsgrad muss bei sämmtlichen Elementen als ein ausserordentlich günstiger bezeichnet werden. Von Einfluss könnte allerdings die jedesmal vorangegangene langdauernde Ladung gewesen sein; doch dürfte der eingeschlagene Weg der einzige sein, welcher es ermöglicht, ein und dasselbe Element unter verschiedenen Bedingungen auf seinen Wirkungsgrad zu prüfen. Es liegt mir fern, den absoluten Zahlen eine besondere praktische Bedeutung beizumessen; dieselben werden ungefähr die obere Grenze darstellen, zu welcher man bei besonders vorsichtiger Behandlung der Elemente gelangen kann.

Im allgemeinen gilt auch für den Wirkungsgrad, dass derselbe mit der Verminderung der Stromstärke zunimmt. Eine Ausnahme bilden die Werthe, bei welchen die Stromstärke den kleinsten Werth hatte. Die Ursache dafür liegt in der Pause von 12 Stunden zwischen Ladung und Entladung, wodurch die O-Polarisation in Wegfall kam. Möglich indess, dass eine Spur derselben im Augenblicke der Schliessung der Elemente die Zählung bis zur zehnprozentigen Abnahme der Stromintensität beeinflusste.

Die Vergleichung der drei Elemente ergibt, dass I etwas zurücksteht, dass jedoch II und III ungefähr denselben Wirkungsgrad besitzen.

Eine entsprechende Verkleinerung der positiven Platte führt somit bei ungeschmälertem Wirkungsgrade zu einer Vergrösserung der Capacität.

Tabelle zur Bestimmung des Wirkungsgrades

Nr.	J'	P'	p'	$E'J'$	ℓ	$E'J'\ell$	J	P	μ	EJ	ℓ	$EJ\ell$	η		
I	0,147	2,720	0,475	0,329	8h	22m	2,723	0,147	2,505	0,490	0,206	8h	15m	2,261	0,830
	0,143	2,735	0,450	0,326				0,132	2,350	0,525	0,241				
	0,110	2,775	0,405	0,300											
	0,245	2,645	0,405	0,550				0,243	2,490	0,470	0,491				
	0,232	2,710	0,395	0,587	3	40	1,977	0,240	2,480	0,470	0,482	3	46	1,678	0,849
	0,226	2,735	0,075	0,520				0,216	2,315	0,515	0,390				
II	0,219	2,725	0,353	0,681				0,287	2,475	0,485	0,573				
	0,264	2,770	0,372	0,633	2	44	1,750	0,285	2,470	0,485	0,565	2	32	1,345	0,769
	0,262	2,805	-0,010	0,629				0,256	2,320	0,520	0,467				
	0,146	2,700	0,410	0,327	8h	35m	2,776	0,149	2,530	0,485	0,305	8h	53m	2,503	0,901
	0,142	2,705	0,430	0,323				0,134	2,395	0,550	0,247				
	0,136	2,740	0,385	0,320											
III	0,245	2,615	0,395	0,544				0,247	2,510	0,465	0,506				
	0,232	2,670	0,385	0,531	4	2,121	0,244	2,600	0,470	0,496	4	18	1,977	0,932
	0,221	2,725	0,340	0,527				0,220	2,365	0,535	0,402				
	0,219	2,890	0,400	0,638	3	08	1,981	0,298	2,505	0,480	0,594	3	03	1,745	0,881
	0,269	2,705	0,365	0,631				0,280	2,485	0,485	0,580				
	0,256	2,750	0,300	0,627				0,264	2,365	0,540	0,482				
III	0,149	2,680	0,475	0,327	8h	35m	2,784	0,147	2,515	0,485	0,300	8h	27m	2,340	0,840
	0,146	2,675	0,455	0,324				0,132	2,865	0,540	0,242				
	0,142	2,705	0,420	0,324											
	0,250	2,600	0,412	0,548				0,247	2,490	0,460	0,501				
	0,237	2,650	0,395	0,534	4	09	2,218	0,244	2,475	0,460	0,492	4	35	2,089	0,942
	0,225	2,710	0,360	0,530				0,220	2,345	0,540	0,397				
III	0,282	2,660	0,410	0,635	3	13	2,037	0,291	2,475	0,475	0,584	3	24	1,820	0,893
	0,275	2,685	0,385	0,634				0,287	2,470	0,475	0,573				
	0,264	2,725	0,340	0,629				0,262	2,355	0,550	0,473	3	24		

Die früher ausgesprochene Vermuthung, dass die negative Platte eines Secundärelementes besser ausgenutzt werden könne, findet durch die vorliegende Untersuchung ihre Bestätigung. Ausserdem ergibt sich, dass die bei Bestimmung von Capacität und Wirkungsgrad auftretenden Erscheinungen mit den Resultaten der zweiten Mittheilung in vollem Einklange stehen, und endlich wird ersichtlich, auf welche Weise diese Bestimmungen auszuführen sind, damit störende Einflüsse thunlichst vermieden werden.

Phys. Inst. d. Univ. Graz, Ende Februar 1891.

III. Magnetische Experimentaluntersuchungen; von Carl Fromme.

(Hierzu Taf. IA Fig. 1-7.)

(Fortsetzung von p. 211.)

§ 7. Abnahme des *PM* mit der Zeit und durch conträre Kräfte.

Es schien denkbar, dass ein permanentes Moment, auf welches kleinere Kräfte gewirkt haben, ein geändertes Verhalten gegenüber solchen Einflüssen zeigen würde, die eine Abnahme des Momentes herbeiführen. Ich habe deshalb durch einige Versuche festzustellen gesucht, ob nicht ein durch kleinere Kräfte über den Normalwerth gehobenes *PM* eine andere, etwa raschere Abnahme mit der Zeit erfährt, als ein auf dem Normalwerth $PM_{W=0}$ befindliches? Doch ergab sich kein merklicher Unterschied. Es könnte ferner eine Erschütterung eine verschieden grosse Abnahme des *PM* hervorbringen, je nachdem sie auf $PM_{W=0}$ oder erst nach Einschaltung einer kleineren Kraft wirkt. Ich habe dies nicht untersucht, weil die Gleichheit der Intensität der in beiden Fällen angewandten Erschütterung schwer zu beurtheilen ist. Ich glaubte hiervon auch um so eher absehen zu können, als sich bei einer früheren Untersuchung¹⁾ ergeben hatte, dass der Zustand, in welchen eine Erschütterung das *PM* versetzt, nicht verschieden ist von demjenigen, welcher durch Einwirkung einer conträren Kraft resultirt. Um so ausführlicher wurde der Einfluss conträrer Kräfte untersucht.

Die Grösse derselben wird im Folgenden nur durch den bezüglichen Rheostatenwiderstand angegeben. Die meisten Versuche sind mit dem Drahtbündel in Paraffin angestellt.

1) C. Fromme, Wied. Ann. 5. p. 371. 1878.

Tab. 23 gibt die Resultate von Versuchen, bei denen eine conträre Kraft entweder direct nach der grössten Kraft ($W=0$), also auf $PM_{W=0}$, oder aber erst nach Einschaltung der neutralen Kraft wirkte, d. h. es wurde nach Magnetisirung bei $W=0$ das Drahtbündel erst sechsmal bei $W=40$ magnetisirt — wodurch sich $PM_{W=0}$ nicht änderte — ehe man die conträre Kraft wirken liess. $PM_{W=0}=798$. Fig. 6.

Tabelle 23.

Conträre Kraft W	Abnahme des PM		Unterschied $\Delta - \delta$	
	ohne Δ	mit Einschalt. d. neutr. Kraft δ	absolut	in Proc. von Δ
160	318,2	306,9	11,3	3,6
200	258,9	249,0	9,9	3,8
240	221,6	206,3	15,3	7,0
300	176,4	163,7	12,7	7,2
400	136,6	119,3	17,3	13
600	92,2	72,9	19,3	21
800	69,8	49,4	20,4	29
1000	54,7	35,5	19,2	35
1500	36,6	18,2	18,4	50
2000	27,0	14,4	12,6	47
3000	16,9	8,5	8,4	50
5000	12,5	7,3	5,2	42

In jedem Falle wird also die Abnahme des PM durch eine conträre Kraft dadurch, dass man vor ihr die neutrale Kraft einschaltet, kleiner. Der absolute Betrag der Abnahme wächst anfangs mit wachsender conträrer Kraft und nimmt dann wieder ab, der procentische Betrag zeigt ein Maximum von 50 Proc. bei kleinen Kräften und sinkt bei grösseren bis auf wenige Procent.

Bei der sechsmaligen Wirkung von $W=40$ blieb nun das $PM_{W=0}$ streng genommen nicht ungeändert, da die erstmalige Magnetisirung eine Zunahme des PM hervorbrachte, welche durch die fünf folgenden wieder aufgehoben wurde. Dagegen liess einmalige Magnetisirung bei $W=55$ das $PM_{W=0}$ gänzlich ungeändert.

Bei den folgenden Versuchen wurde deshalb vor der conträren Kraft $W=55$ einmal eingeschaltet. $PM_{W=0}=806$.

Tabelle 24.

Conträre Kraft <i>W</i>	Abnahme des <i>PM</i>		<i>A</i> - δ	
	ohne <i>A</i>	mit Einschalt. d. neutr. Kraft δ	absolut	in Proc. von <i>A</i>
80	591,4	589,3	2,1	0,4
150	343,0	338,8	4,2	1
300	181,1	175,2	5,9	3
600	92,5	85,4	7,1	8
1000	55,5	48,0	7,5	14
2000	28,3	22,5	5,8	21
3000	17,4	13,5	3,9	23
5000	12,2	10,8	1,9	16

Auch hier übt die Einschaltung der neutralen Kraft denselben Einfluss aus, doch sind die Unterschiede $A - \delta$ jetzt weniger als halb so gross. Der Grund wird wohl nur darin liegen, dass die eingeschaltete Kraft jetzt blos einmal, in Tab. 23 aber sechsmal zur Anwendung kam. Der Unterschied $A - \delta$ verschwindet auch nicht bei wiederholter Anwendung der conträren Kraft. So wurde durch eine conträre Magnetisirung bei $W = 1000$ das $PM_{W=0}$ reducirt

um 56,2 bei einmaliger Anwendung und

„ 58,3 „ vier „ „ „ .

Dagegen betrug nach Einschaltung von $W = 55$ die Reduction des *PM*

nur 48,8 bei einmaliger Anwendung von $W = 1000$

und 50,4 „ vier „ „ „ „ .

Die Reduktionsfähigkeit einer conträren Kraft hängt nun jedenfalls von drei Factoren ab: von der Grösse der Kraft, von der Grösse des zu reducirenden *PM* und von dem Zustande, in welchem sich dasselbe befindet. Der zweite Factor war bei den bisherigen Versuchen immer der gleiche. An Stelle des ersten Factors, der Kraft, wird wohl richtiger das durch sie inducirte temporäre Moment gesetzt, und dieses kann freilich, wie ich in der zweiten Abhandlung gezeigt habe, bei derselben Kraft ziemlich verschieden ausfallen, je nach der Grösse derjenigen, welche ihr unmittelbar vorhergegangen ist. Bei den Versuchen der zweiten Abhandlung hatten zwar alle Kräfte gleiche Richtung, während sie bei den jetzigen wechselt. Aber auch hier handelt es sich um die durch

eine vorhergegangene Kraft modifizirte Wirkung einer folgenden, nämlich um die nach Einschaltung einer gewissen Kraft geänderte Abnahme des PM durch eine conträre Kraft.

Um einen möglichen Zusammenhang dieser Erscheinung des permanenten Magnetismus mit der früher untersuchten des temporären Magnetismus herzustellen, habe ich bei einer Reihe von Versuchen ausser den Änderungen des PM durch die conträren Kräfte auch die durch dieselben inducirten Magnetismen gemessen und dann weiter dieselben Kräfte nicht nur conträr, sondern auch gleichgerichtet mit $W=0$ wirken lassen. Als neutrale Kraft diente $W=40$ (6 mal). Es bedeutet GM den ganzen, inducirten Magnetismus, gezählt von $PM_{W=0}$ ab, TM den temporären, bei Aufhebung der Kraft verschwindenden Magnetismus, d. h. $TM = GM - \delta \cdot PM$.

Tabelle 25.

Die conträr oder in gleicher Richtung auf $PM_{W=0}=804$ wirkenden Kräfte sind $W=1500$; 600; 300.

 $W=1500.$

Conträr		Gleichgerichtet		
	Ohne Einschalt. von $W=40$	Mit Einschalt. von $W=40$		
GM	-43,0	-26,5	GM	6,2
$\delta \cdot PM$	-36,8	-20,5	$\delta \cdot PM$	-0,5
TM	-6,2	-6,0	TM	6,7
				6,4

 $W=600.$

Conträr		Gleichgerichtet		
	Ohne Einschalt. von $W=40$	Mit Einschalt. von $W=40$		
GM	-110,0	-90,4	GM	16,7
$\delta \cdot PM$	-93,4	-75,0	$\delta \cdot PM$	-1,8
TM	-16,6	-15,4	TM	18,5
				16,4

 $W=300.$

Conträr		Gleichgerichtet		
	Ohne Einschalt. von $W=40$	Mit Einschalt. von $W=40$		
GM	-215,4	-198,1	GM	34,9
$\delta \cdot PM$	-180,5	-164,0	$\delta \cdot PM$	-3,1
TM	-34,9	-34,1	TM	38,0
				34,1

Bei der folgenden Versuchsreihe wurde $W = 300$ im ganzen sechsmal zur Wirkung gebracht, gemessen wurde beim 1., 2. und 6. Impuls.¹⁾

$W = 300$.

	Conträr						Gleichgerichtet					
	Ohne Einschaltung von $W = 40$			Mit Einschaltung von $W = 40$			Ohne Einschaltung von $W = 40$			Mit Einschaltung von $W = 40$		
	1.	2.	6.	1.	2.	6.	1.	2.	6.	1.	2.	6.
GM	-214,8	-34,8	-	-198,2	-36,1	-	34,9	33,1	-	33,1	32,5	-
$\delta \cdot PM$	-180,0	-3,7	-	-163,8	-3,4	-	-3,8	-2,1	-	-1,1	-0,6	-
TM	-34,8	-31,1	-32,5	-34,4	-32,7	-32,0	38,2	35,2	33,1	34,2	33,1	32,1
Gesamtänder. des $PM_{W=0}$	-	187,5	-	-	169,7	-	-	7,5	-	-	2,6	-

Es wird also zunächst das ganze, von $PM_{W=0}$ an gerechnete Moment GM der Kraft durch Einschaltung der neutralen Kraft $W = 40$ (6 mal) erheblich kleiner, und zwar sowohl wenn die Kraft in der conträren, als auch in gerinem Maasse — wie ja aus der zweiten Abhandlung schon bekannt —, wenn sie in der gleichen Richtung wirkt. Die geringere Aenderung des $PM_{W=0}$ durch Einschaltung von $W = 40$ zeigt sich ebenfalls bei beiden Richtungen der Kraft — wie für gleiche Richtung schon in Abschnitt 4_b bewiesen —, und die Aenderung des $PM_{W=0}$ bleibt auch dann von verschiedener Grösse, wenn man die Kraft öfters wirken lässt. Der absolute Unterschied beider Aenderungen ist grösser bei conträrer, der procentische aber bei gleicher Richtung der Kraft.

Das verschwindende Moment TM ist ebenfalls nach Einschaltung der neutralen Kraft kleiner, wenig bei conträrer, mehr bei gleicher Richtung.

Gegenüber den grossen Unterschieden der GM sind diese Differenzen der TM bei conträr gerichteten Kräften unbedeutend, weil einem grösseren GM ein etwa ebensoviel grösseres $\delta \cdot PM$ entsprach.

Man kann daher, ohne zu wissen, welche Kräfte schon vorher auf den Körper gewirkt haben, aus der Grösse des

1) Während beim 1. Impuls GM von $PM_{W=0}$ ab gezählt wird, ist es beim 2. Impuls von $PM_{W=0} + \delta_1 \cdot PM$ an zu rechnen. Da $\delta_1 \cdot PM$ nicht abgelesen wurde, so bleibt GM_1 unbekannt, ebenso $\delta_1 \cdot PM$.

G M einer conträren Kraft keinen Schluss auf die Intensität derselben ziehen, ebensowenig aus der Aenderung des *PM*, sondern lediglich aus der Grösse des *TM*, das von vorhergegangenen Kräften nahezu unabhängig ist. Das gleiche *TM*, wie bei conträrer Richtung, erzeugte die Kraft aber auch dann, wenn sie mit den vorhergegangenen Kräften gleichgerichtet war; nur ist es nöthig, die Kraft öfters anzuwenden.

Auf die weitere Deutung dieser Resultate komme ich im letzten Abschnitt zurück.

Von Bedeutung ist auch die Beantwortung der Frage, ob der Effect einer conträren Kraft derselbe ist, mag sie auf $PM_{W=0}$ oder erst dann wirken, nachdem dieses durch eine kleinere gleichgerichtete Kraft vergrössert oder geschwächt ist?

Tabelle 26.

Auf $PM_{W=0} = 805$ wirkt zunächst viermal eine kleinere gleichgerichtete Kraft ($W = \infty$ bis $W = 2$), sodann auf das geänderte *PM* die conträre Kraft $W = 5000$, und zwar siebenmal.

In gleicher Richtung W (4 mal)	Aenderung des $PM_{W=0}$	Abnahme d. geänd. <i>PM</i> durch $W = 5000$, conträr, 1 Impuls	Abnahme durch sechs weitere Impulse	Abnahme durch die 7 Imp. von $W = 5000$	Gesammtänd. des $PM_{W=0}$ durch die gleichgericht. u. die conträre Kraft
∞	0	-12,1	-9,3	-21,4	-21,4
800	- 2,0	-10,9	-9,0	-19,9	-21,9
400	- 4,1	- 9,2	-8,6	-17,8	-21,9
200	- 8,2	- 7,4	-7,3	-14,7	-22,9
100	-11,7	- 6,4	-4,9	-11,3	-23,0
60	- 8,5	- 6,8	-4,4	-11,2	-19,7
50	- 5,1	- 6,9	-4,3	-11,2	-16,3
40	+ 2,3	- 8,1	-5,2	-13,3	-11,0
35	+ 6,9	- 9,0	-5,0	-14,9	- 8,0
30	+10,2	-11,5	-4,8	-16,3	- 6,1
20	+13,8	-13,2	-5,7	-18,9	- 5,1
10	+15,8	-13,0	-7,3	-20,3	- 4,5
5	+10,0	-11,9	-8,8	-20,7	-10,7
2	+ 4,7	-11,8	-9,5	-21,3	-16,6

Demnach unterliegt die Wirkung der conträren Kraft $W = 5000$ erheblichen Aenderungen, je nachdem man sie sogleich auf $PM_{W=0}$ folgen lässt oder erst dann, wenn daselbe durch eine gleichgerichtete Kraft eine Zu- oder Ab-

nahme erfahren hat. Mit wachsender Abnahme des $PM_{W=0}$ durch eine gleichgerichtete Kraft nimmt die Wirkung von $W = 5000$ (1 mal) von 12,1 an ab, erreicht ein Minimum 6,4, wenn erstere Abnahme im Maximum 11,7 ist, und erhebt sich auch nur wenig, wenn die Wirkung der gleichgerichteten Kraft weiter bis Null wieder zunimmt. Geht dieselbe aber in eine Zunahme über, so wächst die Wirkung von $W = 5000$, erreicht ein Maximum 13,2 etwa gleichzeitig mit dem Maximum 15,8 der positiven Aenderung und nimmt nochmals zugleich mit dieser etwas ab.

Die Wirkung des 2.—7. Impulses von $W = 5000$ folgt dasselbe Gesetz, nur tritt kein Maximum auf. In gleicher Weise verhält sich dann auch die Gesamtwirkung aller sieben Impulse von $W = 5000$: Sie nimmt, wenn die ihr vorhergehende gleichgerichtete Kraft zunimmt, um fast 50 Proc. ab und dann wieder bis zum Ausgangswerte zu. Die kleinste Wirkung üben die sieben Impulse der conträren Kraft $W = 5000$ dann aus, wenn die vorhergehende gleichgerichtete zwischen der neutralen und derjenigen Kraft liegt, welche die grösste Abnahme des $PM_{W=0}$ hervorbringt.

Die Gesamtänderung des $PM_{W=0}$ durch die vier Impulse der gleichgerichteten und die sieben Impulse der conträren Kraft nimmt zuerst zu, dann ab und endlich wieder zu. Das Maximum tritt ein, wenn die gleichgerichtete Kraft die grösste Abnahme und das Minimum dann, wenn die gleichgerichtete Kraft die grösste Zunahme hervorbringt.

Besonders bemerkenswerth ist das allgemeine Resultat, dass eine grössere Zahl von Impulsen der conträren Kraft $W = 5000$ stets eine geringere Wirkung ausübt, wenn ihr irgend eine mit $W = 0$ gleichgerichtete Kraft vorhergegangen war, mochte dieselbe nun das $PM_{W=0}$ im positiven oder im negativen Sinne oder gar nicht (neutrale Kraft) geändert haben. Zu beachten ist aber auch das Resultat, dass zwei Kräfte, eine gleichgerichtete ($W = 60$ oder $W = 50$) und eine conträre, deren jede das PM schwächt, zusammen eine geringere Abnahme hervorrufen können, als die conträre Kraft allein.

Während nun bei den letzten Versuchen immer dieselbe conträre Kraft nach verschiedenen gleichgerichteten Kräften

angewandt wurde, liess man jetzt verschiedene conträre Kräfte auf das durch die nämliche gleichgerichtete Kraft geänderte $PM_{W=0}$ wirken. Es war dies entweder $W = 10$ (4 mal), wodurch $PM_{W=0} = 804$ um $13,0 - 13,5$ zunahm, oder $W = 100$ (6 mal), wodurch es um $12,7 - 14,3$ abnahm. Auf das $PM = 817,2$, resp. 790,5 wirkten dann die conträren Kräfte $W = 5000$ bis $W = 50$ mit sieben Impulsen. Gemessen wurde die Wirkung des 1., sowie die des 2.—7. Impulses.

Tabelle 27.

Contr. Kraft $W =$	Impulse	Abnahme des PM		Zu- nahme durch $W = 10$	Abnahme des PM		Ab- nahme durch $W = 100$
		Ohne	Mit Einschaltung von $W = 10$		Ohne	Mit Einschaltung von $W = 100$	
5000	1. Imp.	11,9	11,1	0,8	12,1	5,5	6,6
	2.—7. Imp.	9,0	9,0	0	9,0	4,5	4,5
	Summe	20,9	20,1	0,8	21,1	10,0	11,1
				12,7			13,0
2000	1. Imp.	28,0	25,8	2,2	27,7	13,3	14,4
	2.—7. Imp.	6,8	6,6	0,2	7,4	6,2	1,2
	Summe	34,8	32,4	2,4	35,1	19,5	15,6
				13,4			13,5
1000	1. Imp.	54,1	51,5	2,6	55,1	37,3	17,8
	2.—7. Imp.	2,3	2,1	0,2	2,2	1,7	0,5
	Summe	56,4	53,6	2,8	57,3	39,0	18,3
				13,6			13,5
600	1. Imp.	89,3	86,4	2,9	91,7	74,7	17,0
	2.—7. Imp.	4,6	3,6	1,0	3,8	3,2	0,1
	Summe	93,9	90,0	3,9	95,0	77,9	17,1
				13,7			13,0
300	1. Imp.	178,7	175,9	2,8	180,0	163,5	16,5
	2.—7. Imp.	7,8	6,8	1,0	7,8	6,9	0,9
	Summe	186,5	182,7	3,8	187,8	170,4	17,4
				13,6			13,2
150	1. Imp.	339,4	338,8	0,6	338,4	323,5	14,9
	2.—7. Imp.	17,3	15,6	1,7	18,1	15,9	2,2
	Summe	356,7	354,4	2,3	356,5	339,4	17,1
				14,3			13,4
80	1. Imp.	—	—	—	584,8	569,3	15,5
	2.—7. Imp.	—	—	—	38,3	33,3	0
	Summe	—	—	—	618,1	602,6	15,5
				—			13,1
50	1. Imp.	—	—	—	863,4	845,1	18,3
	2.—7. Imp.	—	—	—	53,6	52,0	1,6
	Summe	—	—	—	917,0	897,1	19,9
				—			13,3

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass alle conträren Kräfte zwischen $W = 5000$ und $W = 50$, sie mögen einmal oder öfters angewandt werden, das PM weniger vermindern, wenn auf $PM_{W=0}$ zuvor die gleichgerichtete Kraft $W = 10$ oder $W = 100$ gewirkt hatte. Man wird wohl annehmen dürfen, dass dies allgemein nach beliebigen gleichgerichteten Kräften gilt, nachdem es in Tab. 26 für eine specielle conträre Kraft, nämlich $W = 5000$, bewiesen worden ist.

Die Grösse der Differenz nimmt mit wachsender conträrer Kraft anfangs zu, erreicht aber bald ein Maximum. Bei Einschaltung von $W = 100$ wurde die conträre Kraft soweit (bis $W = 50$) gesteigert, dass eine permanente Ummagnetisirung des Bündels eintrat. Aber auch dann blieb der Unterschied noch bestehen. Rechnet man die durch $W = 100$ bewirkte Abnahme des PM der durch die conträre Kraft verursachten hinzu, so ist die Gesamtabnahme sogar kleiner, als wenn die conträre Kraft allein gewirkt hätte, nämlich:

bei $W = 2000$	1000	600	300	150	80	50
um 2,1	4,8	4,1	4,2	3,7	2,4	6,6

nur bei $W = 5000$ ist die Gesamtabnahme in Uebereinstimmung mit Tab. 26 um 1,9 grösser. Es sei noch angeführt, dass die Abnahme des $PM_{W=0}$ durch den 1. und durch den 2.—7. Impuls einer conträren Kraft in folgendem Verhältniss zu der Gesamtabnahme $\delta \cdot PM$ durch alle sieben Impulse steht:

$W =$	5000	2000	1000	600	300	150	80	50
$\frac{\delta_1 \cdot PM}{\delta \cdot PM} =$	0,57	0,79	0,96	0,96	0,96	0,95	0,95	0,94
$\frac{\delta_2 \cdot PM}{\delta \cdot PM} =$	0,43	0,20	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06

Bei den kleinsten conträren Kräften nähert sich also die Abnahme des PM mit wachsender Impulszahl viel langsamer einem Maximum, als bei den grösseren Kräften.

Die Versuche ergeben auch, dass die Abnahme des $PM_{W=0}$ mit wachsender conträrer Kraft zuerst langsamer als die Kraft, nachher ihr etwa proportional wächst.

Es sollen nun einige Versuche mitgetheilt werden, bei welchen zwischen $W = 0$ und die conträre Kraft statt einer $W = 0$ gleichgerichteten ebenfalls eine conträre Kraft von passender Grösse eingeschaltet wurde. Dieselbe wurde kleiner als die folgende conträre gewählt. Es sollte festgestellt werden, welche Gesammtabnahme des $PM_{W=0}$ die beiden conträren Kräfte hervorbrachten, verglichen mit der, welche die grössere erzeugte, wenn sie allein wirkte. Jede Kraft wurde nur einmal angewandt.

Tabelle 28.

$PM_{W=0} = 805$. Auf dasselbe wirkte entweder nur die conträre Kraft P oder erst die conträre Kraft p , dann $P \cdot P > p$.

Conträre Kraft P	Abnahme des $PM_{W=0}$	Conträre Kräfte p und P	Abnahme des $PM_{W=0}$
$W = 5000$	11,5	$W = 7000$ $W = 5000$	7,6 13,6 6,0
$W = 5000$	11,9	$W = 6000$ $W = 5000$	9,2 14,5 5,3
$W = 9000$	17,7	$W = 5000$ $W = 3000$	12,5 18,4 5,9
$W = 800$	69,8	$W = 5000$ $W = 800$	12,4 68,8 56,4
$W = 600$	92,5	$W = 5000$ $W = 600$	12,4 92,1 79,7

Es ist also die durch p und P hervorgebrachte Abnahme des $PM_{W=0}$ grösser, als die durch P allein bewirkte, wenn P klein, dagegen kleiner, wenn P gross ist. Der Unterschied beträgt bei:

$$\begin{array}{cccc} W = 5000 & 3000 & 800 & 600 \\ +2,1 \text{ resp.} & +2,6 & +0,7 & -0,5 & -0,4 \end{array}$$

Diese Differenzen sind zwar, mit Ausnahme der ersten, von fast verschwindender Grösse, sie haben jedoch das gleiche Vorzeichen, wie diejenigen, welche auftraten, wenn man statt der conträren Kraft p die gleichgerichtete Kraft $W = 120$ (4 mal) einschaltete, — wodurch $PM_{W=0}$ von 805 auf 794 vermindert wurde — ehe man die conträre Kraft anwendete.

Es ergaben sich nämlich dann bei den conträren Kräften:

$W =$	5000	3000	800	600
die Unterschiede	+5,0	+1,6	-2,9	-2,7

Aus diesen Versuchen könnte man schliessen, dass die Abnahme des PM durch eine kleine gleichgerichtete und die Abnahme durch eine conträre Kraft zum Theil durch den gleichen Vorgang im Eisenkörper verursacht worden sind.

Alle bis jetzt beschriebenen Versuche mit conträren Kräften bezogen sich auf das Drahtbündel in Paraffin. Ein ausserdem noch untersuchter 17 cm langer und 0,6 cm dicker weicher Eisenstab zeigte die geschilderten Erscheinungen ebenfalls, aber mit geringerer Intensität.

§ 8. Einfluss von Erschütterungen.

Ueber den Einfluss von Erschütterungen wurden einige Versuche angestellt, welche für eine Erklärung der Wirkung kleinerer Kräfte nach grösseren von Werth schienen. Sie gaben folgende Resultate.

1) Geringe Erschütterung des Drahtbündels während der Wirkung von $W = 0$ war auf die Zunahme des $PM_{W=0}$ durch die folgende Kraft $W = 15$ ohne Einfluss.

2) Es wurde nach Wirkung von $W = 0$ das Drahtbündel ein wenig erschüttert, wodurch in vier Fällen das $PM_{W=0} = 798$ um 3,9 11,2, 13,4, 18,8, abnahm. Dann erfolgte durch Wirkung von $W = 15$ (einmal) eine Zunahme von 16,3, 23,2, 25,0, 29,2, also eine desto grössere, je grösser der Verlust durch Erschütterung gewesen war. Nunmehr übertraf das PM den Werth 798 um 12,4, 12,0, 11,6, 10,4, also um so weniger, je grösser vorher der Verlust durch Erschütterung gewesen war. Wiederholte Anwendung von $W = 15$ würde diese Unterschiede vielleicht ausgeglichen haben.

3) Erschütterung während der Magnetisirung bei $W = 15$ beeinflusste die Zunahme des $PM_{W=0}$ nicht.

4) Die Abnahme des $PM_{W=0}$ durch die gleichgerichtete Kraft $W = 120$ wurde durch Erschütterung während der Wirkung von $W = 0$ nicht geändert.

5) Wurde aber nach der Wirkung von $W = 0$ erschüttert, sodass $PM_{W=0}$ um 10—20 Sc. abnahm, so erfolgte

durch Wirkung von $W=120$ meist eine kleine Zunahme, und erst der 2. Impuls brachte eine Abnahme des PM hervor.

6) Erschütterte man während der Wirkung von $W=120$, so nahm $PM_{W=0}$ etwas mehr ab, wie ohne Erschütterung. Mit abnehmender Kraft wird der Verlust selbstverständlich noch zunehmen müssen.

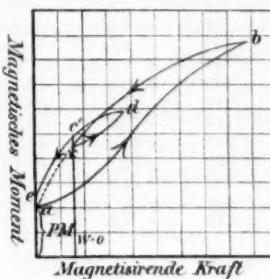
Hier nach üben Erschütterungen vor oder während der Wirkung einer kleineren Kraft theils keinen Einfluss auf die Aenderung des PM aus, theils ist er ein leicht zu erklärender.

§ 9. Zusammengesetzte Processe.

Bei allen bisher beschriebenen Versuchen wirkte eine kleinere Kraft auf einen Eisenkörper, welcher ausschliesslich permanentes Moment besass, d. h. ihre Wirkung begann in einem Augenblick, in welchem der Körper keiner Kraft unterworfen war. Es soll untersucht werden, wie eine kleinere Kraft auf einen Körper wirkt, der das permanente Moment $PM_{W=0}$ und zugleich ein temporäres Moment besitzt. Der Versuch verläuft in folgender Weise: Man steigert die magnetisirende Kraft von Null bis zu einem gewissen Maximalwerth ($W=0$), schwächt sie durch allmähliche Einschaltung von Widerstand, steigert sie aber wieder, bevor noch die Kraft Null erreicht wird, soweit, bis sie einen gewünschten Werth erhält. Dann reducirt man sie allmählich ganz auf Null. Die graphische Darstellung des Verfahrens gibt die Figur.

Gefragt wird, ob die Punkte e und a zusammenfallen oder ob e höher oder tiefer als a liegt, ob also durch Einschaltung des kleinen Processe in den absteigenden Ast des grossen das $PM_{W=0}$ eine Aenderung erfährt und welche?

Man wird ferner auch fragen, ob die Punkte c und c' identisch sind?



Es entspricht nun der bisherigen Versuchsanordnung, wenn wir die Differenz der magnetisirenden Kräfte in c und in d derart variiren, dass die c entsprechende Kraft constant bleibt und die d entsprechende von verschiedener Grösse gewählt wird. In zwei Fällen tritt sicher keine Aenderung von $PM_{W=0}$ ein, fällt also e mit a , aber auch c' mit c zusammen: wenn nämlich d mit c und wenn d mit b sich deckt.

Sämmtliche Versuche wurden mit dem Eisendrahtbündel in Paraffin ausgeführt.

Tabelle 29.

Die grösste angewendete Stromstärke ($W = 0$) war $i_b = 808$. Dieselbe wurde vermindert bis auf $i_c = 1,7$, dann bis auf einen Werth $i_d < i_b$ wieder gesteigert und endlich auf $i_e = 0$ reducirt. $PM_a = PM_{W=0}$ war 803. Es wurde ferner auch das ganze magnetische Moment GM an den Punkten c und c' gemessen. Die Unterschiede $GM_c - PM_a$ und $GM_{c'} - PM_e$ geben dann die verschwindenden Momente TM_c und $TM_{c'}$ bei der Kraft $i_c = 1,7$ ohne und mit Einschaltung des kleinen Prozesses.

i_c	i_d	$PM_c - PM_a$	$GM_{c'} - GM_c$	$\frac{GM_c - PM_a}{= TM_c}$	$\frac{GM_{c'} - PM_e}{= TM_{c'}}$	$TM_{c'} - TM_c$
1,7	19	— 0,5	— 3,2	11,2	8,5	— 2,7
	23	— 0,8	— 3,9	11,5	8,4	— 3,1
	30	— 1,5	— 4,8	11,3	8,0	— 3,3
	39	— 1,5	— 5,3	11,2	7,4	— 3,8
	59	+ 0,3	— 3,2	10,9	7,4	— 3,5
	148	+ 12,0	+ 10,2	10,6	8,7	— 1,8
	164	+ 12,5	+ 11,3	9,5	8,3	— 1,2
	184	+ 13,0	+ 12,1	8,5	7,6	— 0,9
	215	+ 12,9	+ 13,0	8,0	8,1	+ 0,1
	303	+ 12,7	+ 12,1	8,4	7,8	— 0,6
	382	+ 10,9	+ 10,6	7,5	7,2	— 0,3
	498	+ 7,3	+ 6,6	6,1	5,4	— 0,7
	612	+ 4,2	+ 3,6	6,5	5,9	— 0,6

Tabelle 30.

Diese Versuche unterscheiden sich von den vorhergehenden nur darin, dass die untere Grenze der Stromstärke etwas grösser als vorher, nämlich $i_c = 4,0$ ist.

i_c	i_d	$PM_c - PM_a$	$GM_{c'} - GM_c$	$\frac{GM_c - PM_a}{TM_c}$	$\frac{GM_{c'} - PM_c}{TM_{c'}}$	$TM_{c'} - TM_c$
4,0	10	+ 0,5	- 1,7	27,2	25,0	- 2,2
	19	+ 0,5	- 2,8	26,5	23,2	- 3,3
	30	\pm 0	- 4,5	26,5	22,0	- 4,5
	39	- 0,5	- 5,3	26,5	21,7	- 4,8
	59	+ 1,0	- 4,2	26,2	21,0	- 5,2
	164	+ 13,0	+ 11,0	26,5	24,5	- 2,0
	273	+ 13,6	+ 12,6	26,7	25,7	- 1,0
	498	+ 7,3	+ 7,1	26,2	26,0	- 0,2
	612	+ 5,5	+ 4,6	27,3	26,4	- 0,9

Tabelle 31.

Die untere Grenze der Stromstärke wird jetzt erheblich höher gelegt: $i_c = 148$.

i_d	155	164	184	215	250	303	382	437	498	612	808
$PM_c - PM_a$	+ 0,5	± 0	± 0	+ 0,8	+ 1,5	+ 3,0	+ 3,3	+ 3,8	+ 2,0	+ 1,2	± 0

Die Versuche zeigen, dass die Reihe der Zustandsänderungen sich nicht schliesst, wenn man, von $PM_{W=0}$ ausgehend, die magnetisirende Kraft von Null bis zum Maximum ($W=0$) steigert und während des Zurückgehens auf die Kraft Null einen kleinen Kreisprocess einschaltet. Legt man die untere Grenze desselben der Kraft Null recht nahe, (Tab. 29), so erleidet $PM_{W=0}$ Äenderungen nach demselben Gesetz, wie es für den Fall, dass die untere Grenze der Kraft Null gleich war, gefunden ist, denn es wächst PM , wenn die obere Grenze des Kreisprocesses viel höher als die untere liegt, und es nimmt ab, wenn sie ihr benachbart ist. Nur sind die negativen Werthe von $PM_c - PM_a$ viel kleiner, als die früher bei der unteren Grenze $i_c = 0$ gefundenen, während die positiven etwa die gleichen sind. Lässt man i_c wachsen, so verschwinden die negativen Änderungen von PM sehr bald, während die positiven zuerst noch unverändert bleiben. (Tab. 30.) Bei weiter wachsendem i_c nehmen aber auch diese erheblich ab (Tab. 31).

Aehnliche Änderungen wie PM erleidet aber auch GM an der unteren Grenze des kleinen Processes. Es nimmt durch Einschaltung desselben ab, wenn die Grenzen des Processes nahe bei einander liegen, und wächst, wenn sie weiter voneinander entfernt sind. Numerisch stimmen die

Werthe von $GM_c - GM_c$ überein mit denjenigen Werthen von $PM_c - PM_a$, welche man beim Zusammenfallen von c mit a erhalten haben würde.

Somit erscheint die Wirkung einer kleineren Kraft auf PM als specieller Fall des allgemeinen, in welchem die Kraft auf den mit permanentem und zugleich mit inducirtem Magnetismus behafteten Körper wirkt.

Aus den ganzen (GM) und permanenten Momenten PM sind weiter in den Tabellen 29 und 30 die verschwindenden Momente (TM) abgeleitet. Hier sollte TM_c für verschiedene obere Grenzen constant sein, wie das auch in Tab. 30 der Fall ist. Woher die Abnahme in Tab. 29 kommt, war nicht festzustellen. Auch TM_c verhält sich in Tab. 29 nicht regelmässig, wohl aber stimmt der Verlauf der Differenz $TM_c - TM_c$ in Tab. 29 mit dem in Tab. 30 sehr gut überein: Sie wächst, da TM_c mit wachsender oberer Grenze erst ab-, dann zunimmt und stets kleiner als TM_c ist, von Null an ins Negative bis zu einem Maximum und nähert sich dann wieder der Null.

In der folgenden Tabelle sind die Aenderungen des $PM_{W=0}$ einander gegenübergestellt, welche sich ergaben, als der Anfangspunkt c des kleinen Proesses von der Kraft Null auf $i_c = 15$ und weiter auf $i_c = 35$ und 46 gerückt wurde.

Tabelle 32.
 $c_{W=0} = i_b = 799. PM_{W=0} = 798.$

Oberer Grenze $i_c =$	116	100	88	68	54	46	35	23	19	15	
Untere Grenze	$i_c = 0$	+12,0	—	+3,7	-3,0	-4,5	-5,1	-4,9	-4,0	-4,5	-3,2
	$i_c = 15$	+13,0	+10,0	+7,2	+3,2	+1,6	+0,5	+0,6	± 0	± 0	± 0
	$i_c = 35$	+ 9,7	—	+3,8	+1,0	+0,7	± 0	± 0			
	$i_c = 46$	+ 8,0	—	+2,4	+0,5	+0,4	± 0				$\delta. PM_{W=0}$

Mit von $i_c = 0$ an wachsender unterer Grenze des kleinen Proesses verschwinden also — wie schon Tab. 30 zeigte — zunächst die negativen Aenderungen von PM , an ihre Stelle treten zum Theil positive Aenderungen, während zugleich die Grösse der schon vorhandenen zunimmt. Mit weiter wachsendem i_c nimmt dann die Grösse der positiven $\delta. PM_{W=0}$ wieder ab.

Bei den folgenden Versuchen wurde umgekehrt wie bei den bis jetzt geschilderten die obere Grenze des kleinen Prozesses constant gehalten und die untere variirt.

Tabelle 33.

$$PM_{W=0} = 803. \quad i_b = i_{W=0} = 800. \quad i_d = 116 = \text{const.}$$

i_c	0	15	23	33	40	46	54	68	88	116
$\delta \cdot PM_{W=0}$	+12,1	+13,2	+12,2	+10,5	+8,0	+7,9	+6,3	+3,2	+1,1	± 0

Tabelle 34.

$$PM_{W=0} = 803. \quad i_b = i_{W=0} = 770. \quad i_d = 79 = \text{const.}$$

i_c	0	1	2	3	4,5	6	9
$\delta \cdot PM_{W=0}$	-0,4	+3,3	+3,5	+4,9	+5,6	+5,3	+4,8
i_c	11,5	15	19	23	31,5	40	79
$\delta \cdot PM_{W=0}$	+3,9	+3,9	+3,6	+2,2	+1,6	+1,0	± 0

Tabelle 35.

$$PM_{W=0} = 803. \quad i_b = i_{W=0} = 800. \quad i_d = 46 = \text{const.}$$

i_c	0	0,5	1,5	2,5	3,0	4,5	7,5	10	15	23	34	46
$\delta \cdot PM_{W=0}$	-5,2	-4,2	-1,0	+0,4	+0,5	+1,3	+1,9	+0,9	+1,0	+1,4	+0,6	± 0

Fiel die untere Grenze des kleinen Prozesses mit der Kraft Null zusammen, so war in Tab. 33 die obere Grenze derart gewählt, dass $PM_{W=0}$ die grösste positive Änderung erlitt; in Tab. 34 fiel die obere Grenze etwa mit der neutralen Kraft zusammen, und in Tab. 35 wurde sie so klein genommen, dass $PM_{W=0}$ die grösste Abnahme erfuhr. In allen drei Fällen änderte sich mit von der Kraft Null an wachsender unterer Grenze $\delta \cdot PM_{W=0}$ zuerst in positiver Richtung, um nach Erreichung eines Maximums wieder abzunehmen und — wie selbstverständlich — der Null zuzustreben, die mit $i_c = i_d$ erreicht wird.

Auch bei diesen Versuchen beförderte also die Einschaltung des kleinen Prozesses in den absteigenden Ast des grossen stets den Eintritt einer Zunahme des permanenten Moments: War z. B. (Tab. 35) die obere Grenze so

gewählt, dass für die Kraft Null als untere Grenze die maximale negative Aenderung des PM eintrat, so genügte eine kleine Verschiebung der unteren Grenze, um die grosse negative Aenderung in eine kleine positive zu verwandeln.

§ 10. Zusammenstellung der Hauptresultate.

1. Wenn man einen Eisenstab, einen Stahlstab oder ein Bündel von Eisendrähten einer und derselben magnetisirenden Kraft P so oft ausgesetzt hat, dass das permanente Moment PM einen constanten Werth erreichte, so sind im allgemeinen nicht nur grössere, sondern auch kleinere Kräfte p gleicher Richtung noch im Stande, denselben zu ändern. Während aber PM durch eine grössere Kraft als P nur eine Zunahme erfahren kann, vermindern es kleinere Kräfte, wenn sie unter einer gewissen Stärke π bleiben, und nur die Kräfte zwischen π und P steigern es. π verhält sich neutral, es lässt PM ungeändert.

2. Kleinere Kräfte p verursachen selbst dann eine Zunahme, resp. eine Abnahme des durch P erzeugten PM , wenn grössere Kräfte dasselbe ungeändert lassen, also PM das Sättigungsmoment darstellt.

3. Die Wirkung kleinerer Kräfte p ist also zwar nicht an eine obere Grenze von P gebunden, wohl aber an eine untere, welche dadurch bestimmt ist, dass P wenigstens der Kraft des Wendepunktes der permanenten Momente gleich sein muss.

4. Wächst dann P von der Kraft des Wendepunkts an, so wächst mit gleichzeitig zunehmendem PM die Zu- und Abnahme desselben durch kleinere Kräfte sowohl absolut als procentisch. Die grösssten Werthe, welche bei den Versuchen beobachtet wurden, sind + 1,8 Proc. (bei einem Eisendrahtbündel) und - 0,9 Proc. (bei einem Eisenstab).

5. Eine stärkere Wirkung lässt sich unter Umständen erzielen durch wiederholte Anwendung der kleineren Kraft. Dann erreicht die Zunahme des PM bei Drahtbündeln bis + 2 Proc., die Abnahme bis - 2,3 Proc., bei Eisenstäben bis + 1,7 resp. - 3,3 Proc. Bei Stahlstäben sinkt dagegen die erreichbare Zunahme bis zum völligen Verschwinden, und nur die Abnahme steigt bis auf 1,6 Proc.

6. Bei wiederholter Magnetisirung durch kleinere Kräfte p befolgt die Änderung des PM das nämliche Gesetz, wie bei der ersten. Doch wird das Gebiet der positiven Änderungen, je öfter p schon eingewirkt hat, desto kleiner, das der negativen desto grösser. Somit verursachen die zwischen P und der neutralen liegenden Kräfte zuerst eine Zunahme, bei passend häufiger Wiederholung aber eine Abnahme des PM .

7. Bei wiederholter Wirkung einer kleineren Kraft p ändert sich also das permanente, aber auch das verschwindende Moment TM , dieses stets im Sinne einer Abnahme. Solange nun p sich nicht allzuweit von P entfernt, ist die Änderung von PM klein gegenüber der von TM . Erst dann, wenn eine Abnahme von PM durch Wirkung der kleineren Kraft eintritt, nähert sich diese Abnahme von PM der von TM , erreicht sie und wird endlich erheblich grösser als diese. Die kleinsten Kräfte p verursachen allein eine Abnahme des PM , während TM constant bleibt. Die Abnahme des PM , ausgedrückt in Procenten des TM , wächst mit abnehmendem p und scheint für Stahl noch bei endlicher Grösse von p ein Maximum (von 15 Proc. bei viermaliger Wirkung) zu erreichen.

8. Eine kleinere Kraft p übt im allgemeinen eine verschiedene Wirkung auf PM aus, je nachdem sie direct auf P folgt, oder erst nach einer anderen kleineren Kraft p' angewendet wird. Die Wirkung von p ist selbst dann eine andere, wenn Kraft p' die neutrale Kraft war, also die Grösse des PM ganz ungeändert gelassen hatte. Im letzteren Falle hängt zwar die Änderung des PM von der Grösse der Kraft p nach demselben Gesetz ab, wie wenn p' nicht eingeschaltet gewesen wäre, aber sie ist kleiner geworden. Der Unterschied verschwindet auch nicht bei wiederholter Anwendung der Kraft p .

9. Wenn man von P ausgehend allmählich kleiner werdende Kräfte p anwendet und ebenso allmählich bis P wieder aufsteigt, so beschreibt PM einen Kreisprocess, indem es in der absteigenden Reihe der Kräfte p zuerst zu-, dann abnimmt und endlich constant bleibt, bei wieder aufsteigenden Kräften seinen constanten Werth zunächst beibehält, um

nach kleinen Schwankungen dem Anfangswerthe wieder zu-
zustreben, den es mit $p = P$ erreicht. Bei zunehmender Kraft ist PM stets kleiner als bei abnehmender. Bei einem Stahlstab führen von P bis Null abnehmende Kräfte das PM auf einen kleineren, als den Ausgangswerth, bei einem Eisendrahtbündel und einem Eisenstab auf einen grösseren.

10. Die Grösse der Zu- und Abnahme des PM durch kleinere Kräfte ändert sich mit der Dicke der Stäbe, mit der Zahl der Drähte, die zu einem Bündel vereinigt sind, und mit der Länge der Bündel.

11. Die Abnahme des PM durch blosen Einfluss der Zeit ist die gleiche, ob kleinere Kräfte gewirkt haben oder nicht.

12. Erschütterungen vor oder während der Wirkung einer kleineren Kraft üben theils keinen, theils einen leicht verständlichen Einfluss auf die Änderung des PM aus.

13. Die Schwächung des von Kraft P erzeugten PM durch eine conträre Kraft π wird durch Einschaltung der neutralen Kraft zwischen P und π kleiner. Ebenso wird auch das ganze inducire Moment der conträren Kraft kleiner, wogegen das verschwindende Moment nur geringe Änderung zeigt. Der Unterschied in der Abnahme des permanenten Momentes durch die conträre Kraft π verschwindet auch nicht durch wiederholte Anwendung von π . Lässt man statt der neutralen Kraft irgend eine andere kleinere Kraft p nach P wirken, welche das PM derselben in $PM \pm \delta \cdot PM$ ändert, so wird dieses ebenfalls weniger durch eine conträre Kraft geschwächt, als PM .

14. Wenn man beim Ausschalten der Kraft P den Schliessungswiderstand nicht continuirlich bis ∞ vermehrt, sondern, nachdem P bis p abgenommen hat, durch Wegnahme von Widerstand wieder bis zu einer Kraft p' aufsteigt, um dann erst durch continuirliche Einschaltung von Widerstand die Kraft Null zu erreichen, so gelangt man nicht auf das PM der Kraft P , sondern auf ein grösseres, vorausgesetzt, dass p sich nicht zu wenig von Null unterscheidet. Liegt dagegen p der Null nahe, so ändert sich PM nach demselben Gesetz mit der Grösse von p' , wie wenn p der Null gleich wäre; doch sind die negativen Änderungen

kleiner und die positiven grösser. Dagegen ändert sich das ganze von p inducire Moment um dieselben Beträge, wie das permanente Moment für $p = 0$, d. h. es verhält sich gerade so, als ob das verschwindende Moment der Kraft p mit zum permanenten gehörte: Die Wirkung kleinerer Kräfte auf PM erscheint als Specialfall des allgemeinen, wo die Kraft auf den mit permanentem und zugleich mit temporärem Magnetismus behafteten Körper wirkt.

§ 11. Schlussfolgerungen.

Ich zeige zuerst, dass sich die beobachtete Wirkung kleinerer magnetisirender Kräfte nach einer grösseren auf bekannte Erscheinungen nicht zurückführen lässt. Die Grösse des PM , welches eine Kraft P erzeugt, hängt wesentlich von der Geschwindigkeit ab, mit welcher das Absinken der Kraft zur Null erfolgt. Geschieht dies nicht sehr langsam, so fällt PM zu klein aus, und dann vermag eine folgende Kraft p , welche kleiner als P ist, aber langsamer zur Null abfällt, PM zu vergrössern. Bei den vorliegenden Versuchen war nun die electromotorische Kraft im Stromkreis bei einer Beobachtungsreihe constant, dagegen der Widerstand im Siemens'schen Rheostaten bei P und p von verschiedener Grösse, und deshalb fiel wohl im allgemeinen bei Einschaltung von Flüssigkeitswiderstand die Kraft P rascher als p ab.

Indess könnte dann durch p nur eine Zunahme von PM , aber keine Abnahme erfolgen. Sodann änderte sich bei einem Drahtbündel auch nichts an der Zu- und Abnahme des PM , wenn man P besonders langsam, p aber ziemlich rasch abfallen liess. Endlich hätte ein Eisenstab, dessen PM besonders empfindlich gegen rascheren oder langsameren Abfall der Kraft sich erwies, die Zunahme des PM durch kleinere Kräfte in besonders hohem Maasse zeigen müssen — was nicht der Fall war.

Auf diese Weise ist also die Wirksamkeit kleinerer Kräfte sicher nicht zu erklären.

Eine Kraft p vermochte das von P hinterlassene PM auch dann zu ändern, wenn sie selbst bereits in der aufsteigenden Reihe der magnetisirenden Kräfte das gleiche PM wie P erzeugt, der Körper also schon bei p das Maxi-

mum des permanenten Momentes besessen hatte. Eine Kraft p wurde also allein dadurch, dass vor ihr ein grösseres temporäres Moment TM bestand, als sie selbst zu induciren vermag, zur Wirkung auf PM befähigt; die Grösse ihrer Wirkung änderte sich mit der Grösse dieses TM .

Das zeigen auch die Versuche mit eingeschalteter neutraler Kraft. Diese lässt das PM zwar ungeändert, aber die Zu- oder Abnahme des PM durch eine ihr folgende Kraft p ist trotzdem eine andere, als wenn die neutrale Kraft nicht eingeschaltet war. Es genügt also eine temporäre Äenderung des magnetischen Zustandes, auch ohne Äenderung der Grösse des PM , um die Wirkung einer Kraft p zu beeinflussen. Man hat deshalb auch nicht nöthig, die Thatsache, dass nicht nur die erste Anwendung einer kleineren Kraft, sondern auch eine zweite und folgende das PM verändert, dadurch zu erklären, dass eine jede ein PM von anderer Grösse vorfinde.

Nun lässt sich aber schwer vorstellen, wie es möglich sei, dass eine ausschliesslich vorübergehende Äenderung des magnetischen Zustandes einen Einfluss auf die Wirkung späterer Kräfte ausübe. Ich schliesse deshalb, dass eine jede Kraft, wenn nicht die Grösse, so doch sicher den Zustand des permanenten Momentes ändert, mit anderen Worten und in der Sprache der Theorie der drehbaren Molecularmagnete, dass eine jede temporäre Drehung der Molecularmagnete auch eine Änderung ihrer permanenten Gleichgewichtslagen zur Folge hat, womit aber nicht nothwendig eine Änderung der Grösse des permanenten Momentes verbunden zu sein braucht.

War der Eisenkörper also durch eine Kraft p mit PM bereits gesättigt, und unterwirft man ihn dann einer etwas höheren Kraft P , so bleibt die Grösse von PM zwar constant, aber es ändert sich sein Zustand, die Anordnung der Molecularmagnete wird eine andere, und das ist der Grund, weshalb nunmehr auch p wieder wirkungsfähig ist, indem es PM vergrössert. Auch die neutrale Kraft lässt zwar die Grösse von PM constant, aber sie führt doch eine andere Anordnung der Molecularmagnete herbei, und infolge dessen erscheint dann die Wirkung einer folgenden Kraft auf das

PM geändert, einerlei, ob sie die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung wie die vorhergehenden hat.

Um den Zustand, in welchen durch eine grössere oder kleinere Kraft das PM versetzt wird, genauer zu bestimmen, erinnern wir uns zunächst, dass — ein constantes PM vorausgesetzt — eine Kraft p stets desto mehr temporären Magnetismus inducirt, eine je grössere Kraft P ihr vorhergegangen ist, dass aber der inducirete Magnetismus bis zu einem Grenzwerthe abnimmt, wenn die Magnetisirung mit p öfters wiederholt wird. Aus dieser früher (2. Abhandlung) von mir gefundenen und damals als „Magnetische Nachwirkung“ (der grösseren Kraft) bezeichneten Erscheinung geht also hervor, dass der Zustand des permanenten Momentes, wie er aus der Wirkung der grossen Kraft P folgt, die temporäre Drehung der Molecularmagnete durch eine kleinere Kraft begünstigt, dass aber dann die wiederholte Wirkung der kleineren Kraft wieder einen Zustand geringerer Inductions-fähigkeit herbeiführt. Nach Wirkung einer grösseren Kraft werden also die Molecularmagnete temporär relativ leichter, als nach einer kleineren Kraft aus ihren Gleichgewichtslagen herausgedreht.

Nun erfahren wir durch die vorliegenden Versuche, dass dies nicht nur für den elastischen, sondern auch für den permanenten Theil der Drehung gilt: Lässt man nach der grössen Kraft P eine kleinere Kraft p in gleicher oder entgegengesetzter Richtung wirken, so bringt dieselbe eine gewisse Aenderung in der Grösse von PM hervor, die sofort kleiner ausfällt, wenn auf P zuerst die neutrale Kraft gefolgt war.

Das Resultat dieser Betrachtung ist also: Eine kleinere Kraft, welche nach einer grösseren wirkt, bringt die Molecularmagnete in solche Gleichgewichtslagen, aus welchen sie weniger leicht, sowohl temporär als permanent, herausgedreht werden können.

Man wird nun geneigt sein anzunehmen, dass die Aenderung des temporären und die des permanenten Momentes bei der Wirkung kleinerer Kräfte in einem gewissen ursächlichen Zusammenhange stehen. Wenn z. B. nach Kraft P zuerst die neutrale und dann eine beliebige Kraft p ange-

wandt wird, so ist das temporäre Moment bei der letzteren sogleich kleiner, als wenn die neutrale Kraft nicht eingeschaltet war, und darin könnte dann die geringere Aenderung des permanenten Momentes durch p ihren Grund haben. Diese Erklärung hält aber nicht Stich für alle Kräfte p , welche zwischen der neutralen und derjenigen, welche PM am meisten vermindert, oder zwischen PM und derjenigen, die PM am meisten vergrössert, liegen: denn bei diesen wächst die Aenderung des PM , wenn die Kraft, also auch TM abnimmt.

Sind also die Aenderungen des PM nicht durch die des TM bedingt, so wäre nun umgekehrt denkbar, dass die Aenderung des PM das Primäre, die des TM das Secundäre ist. Bei wiederholter Wirkung einer kleineren Kraft p z. B. nimmt PM je nach der Grösse von p entweder ab oder zu, TM aber ab. Nun habe ich früher (2. Abhandlung) gefunden, dass das von einer Kraft inducirte temporäre Moment von dem bestehenden permanenten Moment abhängt, nämlich mit diesem zuerst wächst und später wieder abnimmt. Es wäre deshalb möglich, dass die Abnahme des TM eine Folge der Aenderung des PM ist. Mit dieser Annahme lässt sich aber wohl kaum die Thatsache vereinigen, dass gerade sehr kleinen Aenderungen von PM (in der Nähe der neutralen Kraft) besonders grosse Aenderungen von TM entsprachen.

Ich halte es deshalb für ausgeschlossen, dass die Aenderung des TM durch die Aenderung der Grösse von PM bedingt sein könne. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass kleinere Kräfte nach grösseren wirkend im allgemeinen zwar die Grösse, aber auch den Zustand des PM modifiziren, und dass gerade infolge des letzteren Einflusses auch die Grösse von TM eine Aenderung erleidet.

Nur eine einzige Kraft änderte nicht die Grösse, sondern nur den Zustand von PM . Es ist bemerkenswerth, dass diese als neutrale bezeichnete Kraft bei der verschiedensten Grösse von PM den gleichen Werth besass.

Es bleibt nun noch übrig zu fragen, ob sich auf Grund der Theorie der drehbaren Molecularmagnete eine Anschauung von der Art und Weise einer solchen Zustandsänderung gewinnen lässt. Dieselbe kann nur darin bestehen, dass sich die Molecularmagnete permanent anders gruppieren, und zwar

derart, dass sie temporär und permanent weniger leicht verdreht werden können. Vielleicht darf man sich nun diese neue Anordnung in einfachster Weise so vorstellen, dass die Axen der Molecularmagnete durch kleinere Kräfte einander mehr und mehr parallel gestellt werden.

Geschieht dies in der Weise, dass diejenigen, welche der Richtung der Kraft am meisten genähert sind, etwas zurückgehen, während die mit grösserem Neigungswinkel gegen die Richtung der Kraft etwas vorangehen, so lässt sich zunächst die Thatsache erklären, dass die grössten unter den Kräften p das PM vergrössern, die kleineren aber es verringern.

Denn man braucht nur noch die Annahme zu machen, dass mit von P an abnehmendem p die Wirkung auf die Molecularmagnete, welche mit der Krafrichtung einen grösseren Winkel bilden, rascher zunimmt, und später bei der Annäherung von p an die Null langsamer abnimmt, als die Wirkung auf diejenigen, welche kleinere Winkel mit der Krafrichtung einschliessen. Dieser Annahme gemäss sind in Fig. 7 die beiden gestrichelten Curven gezeichnet; die ausgezogene Curve stellt ihre Resultante dar und gibt den beobachteten Verlauf der Aenderung des PM durch kleinere Kräfte wieder.

Je öfter eine kleinere Kraft wirkt, desto mehr werden die Axenrichtungen einander genähert, und desto stabiler wird die Anordnung. Die grösste Stabilität erreichte man dadurch, dass man alle kleineren Kräfte in absteigender Reihe zur Wirkung brachte. Die Erklärung liegt darin, dass die grösseren unter ihnen vorzugsweise auf die weniger gedrehten, die kleineren auf die stärker gedrehten Molecularmagnete wirken, und somit eine besonders starke Annäherung an die Parallelstellung erzielt wird.

Auch die übrigen beobachteten Erscheinungen lassen sich unschwer aus obiger Hypothese erklären. Eine Entscheidung über ihre Berechtigung lässt sich vielleicht durch Versuche mit einem Aggregat kleiner Magnete ähnlich denen, welche kürzlich Hr. Ewing¹⁾ beschrieben hat, treffen.

Giessen, Math.-Phys. Cabinet, 13. Februar 1891.

1) J. A. Ewing, Phil. Mag. (5) 30. p. 205. 1890.

IV. *Ueber die electromagnetische Drehung
der Polarisationsebene in Flüssigkeiten, besonders
in Salzlösungen; von Hans Jahn.*

(Der k. Acad. d. Wissensch. zu Berlin vorgelegt am 12. März 1891, für
die Annalen bearbeitet vom Hrn. Verf.)

Die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene in Salzlösungen war, als ich die vorliegende Untersuchung begann, ausschliesslich unter physikalischen Gesichtspunkten studirt worden, während die etwa aufzufindenden stoechiometrischen Beziehungen ganz in den Hintergrund traten. Während ich mit meinen Versuchen beschäftigt war, erschien eine Arbeit von Perkin über einige Salze des Ammoniak und substituirter Ammoniake. Eine kurze Notiz ferner in der Revue générale des sciences setzte mich davon in Kenntniss, dass Perkin mit einer ausgedehnten Untersuchung über Salzlösungen beschäftigt ist. Dadurch wurde ich veranlasst, meine Versuche, die sich nur mit den Salzen diamagnetischer Metalle beschäftigt hatten, zu einem vorläufigen Abschluss zu bringen, um nicht mit dem englischen For- scher zu collidiren.

Zur Bestimmung der Drehung der Polarisationsebene bediente ich mich eines grossen von Schmidt und Haensch gebauten Polarisationsapparates, den Hr. Prof. Landolt mit grösster Bereitwilligkeit zu meiner Verfügung stellte. Ich möchte nicht unterlassen, auch an dieser Stelle ihm dafür meinen wärmsten Dank abzustatten. Der Apparat war ein Laurent'scher Halbschattenapparat, dessen optisches System, um jede Verrückung zu verhindern, in einen Marmorblock eingelassen war. Der Theilkreis gestattete die Ablesung ganzer Minuten. Zwischen den beiden Nicol'schen Prismen des Apparates befand sich eine aus übersponnenem

Kupferdraht gewickelte Spirale von 6360 Windungen, deren Widerstand 23 S.-E. betrug. In der Axe dieser Spirale lag ein weites Glasrohr, welches das 80 cm lange, die zu untersuchende Flüssigkeit enthaltende Polarisationsrohr centrisch umschloss. Es war so für eine genügende Luftkühlung gesorgt, wenigstens habe ich nie irgend welche Störungen der Ablesungen durch Schlierenbildung infolge ungleichförmiger Erwärmung der Flüssigkeit durch die von dem Strom durchflossene Spirale u. dgl. m. erfahren. Die Beobachtungen beziehen sich alle auf das gelbe Licht der Natriumflamme, das ich nach dem Vorschlage von E. v. Fleischl nicht durch Kochsalz, sondern durch Natriumbromid herstellte. Dieses Salz liefert Flammen von weit grösserer Lichtstärke, was bei der Länge der von mir verwendeten Flüssigkeitsschicht die Beobachtungen wesentlich erleichterte. Die Intensität des die Spirale durchfliessenden Stromes wurde mit Hülfe eines Silbervoltameters bestimmt, und zwar benützte ich zur Berechnung derselben das von F. und W. Kohlrausch ermittelte electrochemische Aequivalent des Silbers. Um die Beobachtungen von der nicht ganz unveränderlichen Nulllage des Polarisationsapparates unabhängig zu machen, wurde die Richtung des Stromes mittelst einer hinter dem Voltameter eingeschalteten Quecksilberwippe in bestimmten Intervallen umgedreht. Für die so gewonnenen Beobachtungen zu beiden Seiten der Nulllage wurde mit Hülfe der Simpson'schen Regel der Mittelwerth berechnet. Es war das nothwendig, da während der Dauer des Stromschlusses, die ja nach Umständen 15 oder 20 Minuten betrug, sich fortwährend kleine Schwankungen der Stromintensität, mithin auch der Drehung beobachten liessen. Als Stromquelle fungirten zwölf Bunsen'sche Becher. Eigene Versuche erwiesen, dass die von dem leeren Rohre unter dem Einfluss des Stromes hervorgerufene Drehung der Polarisationsebene unmessbar klein war.

Die Temperatur, bei welcher die Beobachtungen ausgeführt wurden, schwankte innerhalb enger Grenzen um 20° C. Uebrigens ist der Einfluss der Temperatur auf die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene, wie Perkin hervorgehoben hat, ein geringfügiger.

Abhängigkeit der Drehung von der Stromintensität, Ableitbarkeit der specifischen Drehung einer Substanz aus der Drehung ihrer Lösungen.

Schon G. Wiedemann hat gefunden, dass die Drehung der Polarisationsebene der Intensität des die Spirale durchfliessenden Stromes direct proportional ist. Meine Beobachtungen haben dieses Gesetz ausnahmslos bestätigt.

In den nachfolgenden Tabellen ist unter J die in Ampères ausgedrückte Stromintensität tabellirt, D gibt die beobachtete Drehung in Winkelminuten und w den Quotienten D/J , also die der Stromintensität 1 entsprechende Drehung. Unter d ist die bei 20° C. bestimmte Dichte der betreffenden Flüssigkeiten verzeichnet und zwar ist dieselbe auf die Dichte des Wassers bei der gleichen Temperatur als Einheit bezogen. S endlich bezeichnet die auf die specifische Drehung des Wassers als Einheit bezogene specifische Drehung der betreffenden Substanz also den Quotienten:

$$\frac{w d_1}{w_1 d} = \frac{w}{w_1 d},$$

da $d_1 = 1$ zu setzen ist.

Es war zunächst eine für die von mir geplante Untersuchung wichtige Vorfrage zu lösen, mit welchem Grad von Annäherung nämlich sich aus der specifischen Drehung einer Lösung die specifische Drehung der gelösten Substanz ableiten lässt. Es liegen allerdings zahlreiche Versuche über diesen Gegenstand vor, die es wahrscheinlich machen, dass die Drehung der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Menge der gelösten Substanz proportional ist. Allein abgesehen von den nicht immer geringen Abweichungen, welche diese älteren Versuche ergeben haben, war namentlich die Frage noch nicht gründlich untersucht worden, ob die so abgeleitete specifische Drehung eine der betreffenden Substanz eigenthümliche Constante ist, namentlich ob die chemische Natur des Lösungsmittels keinen Einfluss auf die specifische Drehung der Substanz ausübt.

Versuche von Quincke, die die Constantz der specifischen Drehung zweifelhaft machen, liessen mir eine erneute Untersuchung dieser Frage sehr wünschenswerth erscheinen. Ich schlug bei diesen Versuchen den Weg ein, den bereits

Landolt für die Lösung dieser Frage bezüglich der mit natürlicher optischer Aktivität begabten Körper betreten hatte.

Es wurde zunächst für eine Reihe flüssiger Verbindungen von möglichster Reinheit die specifische Drehung bestimmt. Die erhaltenen Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle I.

Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>d</i>	<i>s</i>
Wasser . . .	0,5658 0,4955 0,5499 0,4752 0,5170	56,3 49,4 55,1 47,65 51,55	99,50 99,69 100,20 100,30 99,71		
		Mittel	99,88	1	1
Methylalkohol .	0,7205 0,7633 0,7310	51,00 58,49 52,01	70,78 70,51 71,15		
		Mittel	70,81	0,79353	0,8923
Aethylalkohol .	0,70095 0,7119 0,6975	59,38 60,15 59,42	84,64 84,49 85,19		
		Mittel	84,77	0,79149	1,0710
Aceton	0,7884 0,7657 0,7621	67,24 65,20 64,22	85,28 85,15 84,27		
		Mittel	84,90	0,79617	1,0663
Benzol	0,71805 0,7456 0,6986	159,85 167,08 157,20	222,62 224,10 225,03		
		Mittel	223,92	0,88008	2,5443
Toluol	0,6120 0,7716 0,7278	125,25 157,31 148,00	204,65 208,90 203,33		
		Mittel	203,96	0,86687	2,3528
Xylol	0,6903 0,7863 0,7586	129,92 148,49 142,72	188,20 188,84 189,30		
		Mittel	188,78	0,86645	2,1788

Diese Versuchsdaten erweisen die vollständige Richtigkeit des eingangs erwähnten Satzes von G. Wiedemann, dass die Drehung der Polarisationsebene der Intensität des die Spirale durchfliessenden Stromes proportional sei.

Von den untersuchten Substanzen wurden nun abgeogene Mengen miteinander gemischt und die durch die so erhaltenen Lösungen hervorgerufene Drehung aufs neue ermittelt.

Tabelle II.

Substanzen	Menge der in der Volumeneinheit der Mischungen enthaltenen Substanzen	J	D	$w = \frac{D}{J}$	d
Aceton + Wasser	0,19985 g C ₃ H ₆ O 0,77339 " H ₂ O	0,7525 0,7322	73,64 70,80 97,52	Mittel 97,69	0,97324
Aceton + Alkohol	0,23175 g C ₃ H ₆ O 0,56185 " C ₂ H ₆ O	0,7063 0,6981 0,6977	60,9 60,45 59,75 86,22 86,60 85,64	Mittel 86,15	0,7936
Aceton + Benzol	0,24828 g C ₃ H ₆ O 0,60607 " C ₆ H ₆	0,7520 0,7318	135,05 130,49 179,58 178,32	Mittel 178,95	0,85435
Benzol + Alkohol	0,28079 g C ₆ H ₆ 0,58988 " C ₂ H ₆ O	0,5941 0,7462 0,7128 0,7179	76,82 94,80 91,11 92,04 129,30 127,04 127,82 128,20	Mittel 128,09	0,82017
Benzol + Methylalkohol	0,26172 g C ₆ H ₆ 0,55786 " CH ₃ O	0,6939 0,6942 0,7007	80,00 79,41 80,35 115,29 114,40 114,70	Mittel 114,79	0,81958
Toluol + Alkohol	0,30851 g C ₇ H ₈ 0,51553 " C ₂ H ₆ O	0,7393 0,7572 0,7392	93,70 94,02 92,95 126,73 124,17 126,52	Mittel 125,82	0,81904
Xylol + Alkohol	0,24367 g C ₈ H ₁₀ 0,56914 " C ₂ H ₆ O	0,7260 0,7381 0,7639	82,65 84,45 87,90 113,84 114,41 114,30	Mittel 114,18	0,81281

Berechnet man unter der Voraussetzung, dass die Drehung der in der Volumeneinheit enthaltenen Menge des gelösten Körpers proportional sei, die spezifische Drehung des Aceton, des Benzol, des Toluol und des Xylol aus der Drehung ihrer Lösungen, so erhält man:

Aceton

in Wasser gelöst . .	1,0183
„ Alkohol „ . .	1,1208
„ Benzol „ . .	0,9892
Mittel	1,0428

Die spezifische Drehung des reinen Aceton beträgt nach den früher mitgetheilten Messungen:

1,0663.

Ebenso erhält man auch für die spezifische Drehung des Benzol:

in Alkohol gelöst . .	2,5044
„ Methylalkohol gelöst . .	2,4840
Mittel	2,4942

während die Drehung der reinen Substanz zu

2,5443

bestimmt wurde.

Für das in Alkohol gelöste Toluol ergibt sich die spezifische Drehung zu:

2,3265,

während für das reine Toluol

2,3528

gefunden wurde.

Für das Xylol endlich berechnet sich die spezifische Drehung aus der Drehung der alkoholischen Lösung zu:

2,1844

also in sehr guter Uebereinstimmung mit dem für die reine Substanz gefundenen Werthe:

2,1788.

Diese Versuche lehren also, dass sich die spezifische Drehung einer gelösten Substanz aus der Drehung ihrer Lösungen in der That mit grosser Annäherung berechnen lässt, und zwar ist die so ermittelte Drehung von der chemischen Natur des angewendeten Lösungsmittels vollkommen unabhängig, wie aus der befriedigenden Uebereinstimmung der verschiedenen für Aceton und Benzol erhaltenen Werthe hervorgeht. Die geringen Abweichungen, die sich ergeben haben, müssen Versuchsfehlern zugeschrieben werden. Der Theilkreis des von mir benutzten Polarisationsapparates gestattete nur die Ablesung ganzer Winkelminuten, sodass ein Ablesungsfehler von einer Minute schwer zu vermeiden war. Rechnet man hierzu die unvermeidlichen Versuchsfehler in

der Bestimmung der Stromintensität, sowie in der Dichte, die alle in das Endresultat eingehen, so glaube ich die Sicherheit der von mir gemessenen Drehungen nicht weiter als auf 1—2 Winkelminuten verbürgen zu können. Grösser sind nun aber für die untersuchten Flüssigkeiten die Abweichungen nicht zwischen den beobachteten und den unter Zugrundelegung der für die reinen Substanzen ermittelten Werthe für die Mischungen berechneten Drehungen:

		Drehung	
		beob.	berechn.
Aceton in Wasser		97,69	98,65
" " Alkohol		86,15	84,89
" " Benzol		178,95	180,87
Benzol in Alkohol		128,09	129,21
" " Methylalkohol		114,79	116,87
Toluol in Alkohol		125,82	126,62
Xylool in Alkohol		114,18	114,04

Electromagnetische Drehung der Polarisationsebene in Salzlösungen.

Nach Erledigung dieser Vorfrage wurde die Drehung für eine Reihe von Salzlösungen ermittelt und die specifische Drehung der gelösten Substanz unter Zugrundelegung des durch die früheren Versuche bewiesenen Satzes berechnet. Die Concentration der Salzlösungen wurde durch Mischung gewogener Mengen der sorgfältig getrockneten Salze mit gewogenen Wassermengen bestimmt. Bei Salzen, die wegen ihrer hygrokopischen Eigenschaften schwer einzuhängen waren, oder die wie das Lithiumchlorid nicht ohne Zersetzung entwässert werden können, wenn man nicht ganz besondere Vorsichtsmaassregeln anwendet, wurden beliebige Lösungen hergestellt, deren Concentration man durch geeignete analytische Bestimmungen ermittelte.

Die für die Salzlösungen ermittelten Werthe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in welcher sämmtliche Bezeichnungen dieselbe Bedeutung haben wie in den früheren Tabellen bis auf *S*, welches die specifische Drehung der gelösten Salze bezeichnet.

Tabelle III.

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>S</i>
HCl I	1,0840	0,072 74 g HCl	0,6461	73,11	113,16	
			0,6154	69,18	112,42	
			0,6609	74,56	112,82	
	1,0175	0,036 37 g HCl		Mittel 112,80	2,2922	
			0,5346	57,10	106,81	
			0,5597	59,22	105,80	
LiCl I	1,0637	0,110 68 g LiCl	0,6489	76,25	117,51	
			0,6617	77,43	117,01	
			0,6786	79,34	116,92	
	1,0333	0,056 017 g LiCl		Mittel 117,15	1,9740	
			0,5749	62,44	108,60	
			0,6450	70,40	109,15	
Li ₂ SO ₄ I	1,1781	0,231 55 g Li ₂ SO ₄	0,3874	40,25	103,90	
			0,3210	33,25	103,58	
				Mittel 103,74	0,39234	
	1,0961	0,119 46 g Li ₂ SO ₄	0,5496	56,10	102,07	
			0,5768	58,70	101,77	
			0,5589	56,82	101,66	
NaCl I	1,0835	0,124 64 g NaCl	0,6037	70,47	116,74	
			0,6128	70,97	115,81	
			0,5828	67,20	115,81	
	1,0436	0,063 69 g NaCl		Mittel 115,95	1,6097	
			0,5405	58,65	108,52	
			0,5134	56,05	109,17	
NaBr I	1,1870	0,182 11 g NaBr	0,5943	67,50	109,18	
			0,5928	64,35	108,11	
			0,5418		Mittel 108,74	1,6877
	1,0843	0,111 33 g NaBr			Mittel 1,6487	
			0,5344	73,64	124,68	
			0,5523	74,18	125,13	
NaBr II	1,0843	0,111 33 g NaBr	0,5763	67,40	124,40	
				Mittel 124,74	1,6062	
			0,5344	61,05	114,24	
	1,0843	0,111 33 g NaBr	0,5523	64,12	116,10	
			0,5763	66,37	115,16	
				Mittel 115,17	1,6054	
					Mittel 1,6058	

(Fortsetzung der Tabelle III.)

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>s</i>
NaJ I	1,1959	0,259 80 g NaJ	0,3981	60,45	151,83	
			0,3872	57,99	149,77	
	II	0,160 02 g NaJ	0,5670	74,92	132,14	2,2013-
			0,5584	73,71	132,00	
			0,5423	71,52	131,88	
NaNO ₃	1,1130	0,176 96 g NaNO ₃		Mittel	131,98	2,2423-
				Mittel	2,2218	
			0,6513	64,35	98,81	
			0,6713	66,65	99,05	
			0,5530	54,70	98,92	
			0,6497	63,90	98,86	
			0,5733	56,50	98,55	
			0,5792	57,25	98,84	
				Mittel	98,75	0,29023
			0,6958	71,5	102,76	
Na ₂ SO ₄	1,0679	0,078 15 g Na ₂ SO ₄	0,6839	69,9	102,21	
			0,7344	74,9	101,98	
			0,5889	60,87	103,35	
			0,6561	66,45	101,91	
				Mittel	102,48	0,4485
			0,5695	60,5	105,88	
Na ₂ CO ₃ I	1,1025	0,116 24 g Na ₂ CO ₃	0,5641	59,45	105,40	
			0,5955	62,80	105,47	
			0,5693	60,50	106,27	
				Mittel	105,75	0,61286
			0,5583	55,62	103,90	
			0,5283	54,00	102,21	
II	1,0581	0,058 885 g Na ₂ CO ₃	0,4590	48,05	104,70	
			0,4760	48,88	102,68	
				Mittel	103,87	0,58564
				Mittel	0,59925	
			0,6563	72,80	110,92	
			0,6360	71,20	111,96	
KCl I	1,0750	0,125 05 g KCl	0,5074	57,25	112,84	
			0,6006	67,12	111,76	
				Mittel	111,87	1,3495
			0,3980	41,45	104,18	
			0,5881	62,19	105,76	
			0,5499	57,95	105,40	
II	1,0312	0,051 38 g KCl		Mittel	105,10	1,3853
				Mittel	1,3674	
			0,5185	63,38	122,24	
			0,5490	67,86	123,60	
			0,5356	66,01	123,25	
				Mittel	123,03	1,4160

(Fortsetzung der Tabelle III.)

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>S</i>
KBr II	1,0894	0,128 59 g KBr	0,6398 0,6157 0,5947	72,84 70,61 67,99	118,85 114,68 114,32	
				Mittel	114,28	1,4153
					Mittel	1,4157
KJ I	1,2400	0,334 07 g KJ	0,4822 0,4575 0,5210	76,58 72,92 82,50	158,81 159,47 158,36	
	II	1,1264	0,175 35 g KJ	0,4535 0,3659 0,3973	59,54 48,30 51,95	131,30 132,00 130,74
				Mittel	131,05	2,0670
					Mittel	2,0556
K ₂ SO ₄	1,0492	0,053 467 g K ₂ SO ₄	0,4533 0,4905 0,5321 0,5532	45,63 49,48 53,70 56,00	100,66 100,87 100,92 101,23	
	KNO ₃	1,0652	0,107 61 g KNO ₃	0,4786 0,3906 0,4412 0,3307	48,08 38,67 48,16 32,51	100,92 99,00 97,88 98,30
				Mittel	98,35	0,36975
K ₂ CO ₃	1,1926	0,243 04 g K ₂ CO ₃	0,4804 0,5550 0,5553	50,90 58,82 59,20	105,95 106,00 106,62	0,24076
				Mittel	106,19	0,46222
BeSO ₄ I	1,1808	0,239 06 g BeSO ₄	0,6852 0,6321 0,5836	69,11 64,57 58,64	100,87 102,15 100,48	
	II	1,0956	0,123 40 g BeSO ₄	0,6985 0,6775 0,6123 0,6952	70,90 68,01 61,84 70,15	101,17 100,38 100,18 100,91
				Mittel	100,74	0,29264
					Mittel	0,28895
CaCl ₂ I	1,1522	0,199 12 g CaCl ₂	0,6596 0,6957 0,6733	81,86 87,89 83,82	124,11 126,33 124,48	
	II	1,0850	0,108 50 g CaCl ₂	0,7514 0,7614 0,7446	85,85 86,81 85,25	114,25 114,02 114,50
				Mittel	114,26	1,5311
					Mittel	1,5104

(Fortsetzung der Tabelle III.)

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>S</i>
CaBr ₂ I	1,2512	0,3094 g CaBr ₂	0,6618	94,09	142,18	
			0,6928	98,55	142,24	
			0,6906	98,95	143,33	
	II	0,1651 g CaBr ₂	0,6851	84,87	128,87	1,5643
			0,6931	85,45	128,80	
				Mittel	123,59	1,6064
					Mittel	1,5854
SrCl ₂ I	1,1940	0,23484 g SrCl ₂	0,7185	87,82	121,52	
			0,7857	96,46	122,76	
			0,7488	90,52	121,77	
	II	0,10621 g SrCl ₂	0,8288	91,71	110,66	1,1116
			0,8010	88,00	109,86	
			0,7707	85,22	110,57	
				Mittel	110,36	1,0823
					Mittel	1,0969
SrBr ₂ I	1,2922	0,34994 g SrBr ₂	0,7872	110,50	140,37	
			0,7772	109,46	140,85	
			0,7933	111,70	140,81	
	II	0,17003 g SrBr ₂	0,7447	89,43	120,10	1,3273
			0,8063	96,35	119,50	
			0,7906	94,70	119,78	
				Mittel	119,79	1,3192
					Mittel	1,3233
BaCl ₂ I	1,2919	0,34613 g BaCl ₂	0,7782	99,19	127,46	
			0,7676	97,47	126,97	
			0,7537	96,15	127,56	
	II	0,15818 g BaCl ₂	0,7539	127,33		0,94625
			0,7634	85,37	113,23	
			0,7380	85,18	111,60	
				82,77	112,92	
				Mittel	112,58	0,93740
					Mittel	0,94183
BaBr ₂ I	1,5425	0,64253 g BaBr ₂	0,6098	99,00	162,47	
			0,7199	116,27	161,50	
			0,7547	122,80	162,44	
	II	0,34283 g BaBr ₂	0,7114	162,13		1,1226
			0,7312	91,85	133,05	
			0,7556	97,26	133,02	
				100,47	132,96	
				Mittel	133,01	1,1240
					Mittel	1,1233

(Fortsetzung der Tabelle III.)

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>S</i>
MnCl ₂ I	1,1985	0,25155 g MnCl ₂	0,8323 0,8203 0,8391	104,72 108,54 105,30	125,81 126,22 125,50	
					Mittel 125,84	1,2381
II	1,0894	0,11060 g MnCl ₂	0,7933 0,8148 0,8170	89,17 92,27 92,24	112,41 113,25 112,90	
					Mittel 112,85	1,3227
						Mittel 1,2804
MnSO ₄ I	1,2460	0,27704 g MnSO ₄	0,7767 0,7615 0,7557	81,48 79,52 78,85	104,90 104,48 104,34	
					Mittel 104,56	0,27663
II	1,1434	0,15742 g MnSO ₄	0,8248 0,8003 0,8288	84,39 82,87 85,04	102,32 103,54 102,61	
					Mittel 102,82	0,26820
						Mittel 0,27242
CdCl ₂ I	1,3200	0,37647 g CdCl ₂	0,6623 0,6828 0,7036	92,97 96,00 96,73	140,37 140,60 137,47	
					Mittel 139,48	1,1862
II	1,2776	0,50066 g CdCl ₂	0,6029 0,6230 0,6526	80,58 84,70 87,90	133,66 135,90 134,70	
					Mittel 134,77	1,1494
III	1,1751	0,29555 g CdCl ₂	0,7294 0,7028 0,6466	88,85 84,42 78,09	121,82 120,12 120,74	
					Mittel 120,90	1,1146
IV	1,1550	0,19542 g CdCl ₂	0,6574 0,7308 0,6410	78,30 85,90 75,94	119,10 117,54 118,47	
					Mittel 118,70	1,1637
						Mittel 1,1535
CdBr ₂ I	1,3812	0,39350 g CdBr ₂	0,6319 0,6463 0,6072	92,02 93,95 87,03	145,63 145,37 143,32	
					Mittel 144,77	1,2960
II	1,1628	0,19181 g CdBr ₂	0,6907 0,6888 0,7008	88,71 85,79 84,87	121,20 124,54 121,11	
					Mittel 122,28	1,3128
						Mittel 1,3044

(Fortsetzung der Tabelle II.)

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>S</i>
CdJ ₂ I	1,5181	0,63526 g CdJ ₂	0,6650	146,08	219,67	
			0,7570	166,18	219,52	
			0,7524	166,11	220,76	
				Mittel 219,98		2,0781
II	1,2791	0,34102 g CdJ ₂	0,6287	101,73	162,20	
			0,6762	109,51	161,94	
			0,7184	116,34	161,93	
				Mittel 162,02		2,0002
III	1,1541	0,18744 g CdJ ₂	0,6571	87,4	183,00	
			0,6858	91,65	133,65	
			0,6604	88,46	133,95	
				Mittel 133,53	1,9667	
					Mittel 2,0138	
CdSO ₄ I	1,1781	0,22114 g CdSO ₄	0,5061	53,49	105,70	
			0,6895	72,18	105,33	
			0,6065	63,09	104,02	
				Mittel 105,02		0,42163
II	1,0908	0,11298 g CdSO ₄	0,6862	71,06	103,55	
			0,6548	67,90	103,70	
			0,6608	67,49	102,13	
				Mittel 103,13	0,47334	
					Mittel 0,44749	

Die in der vorstehenden Tabelle niedergelegten Versuchsdaten erweisen nicht allein aufs Neue die Proportionalität der Drehung mit der Intensität des die Magnetisierungsspirale durchfliessenden Stromes, sondern sie erhärten auch den bereits von Verdet aufgestellten Satz, dass auch für Salzlösungen die Drehung der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Salzmenge proportional ist. Dieser Satz ist in neuerer Zeit von Quincke in Zweifel gezogen worden. Nun zeigen sich ja allerdings bei einigen Salzen Abweichungen, und zwar die grösste bei dem Manganchlorid, für welches sich die specifische Drehung aus der concentrirten Lösung zu 1,2381, aus der verdünnten Lösung dagegen zu 1,3227 ergibt. Allein diese Abweichung liegt innerhalb der Grenzen, welche der Genauigkeit meiner Messungen gesteckt waren. Unter Zugrundelegung der aus der Drehung der verdünnteren Lösung hergeleiteten specifischen Drehung des gelösten Manganchlorides würde sich die Drehung der concentrirteren

Lösung zu 127,97 Min. berechnen, während 125,84 Min. beobachtet wurden. Diese Abweichung von beiläufig 2 Min. war aber gerade bei der Lösung des Manganchlorides um so schwerer zu vermeiden, als die genaue Einstellung des Polarisationsapparates durch die stark rothe Färbung der zwischen den beiden Nicols befindlichen Flüssigkeitsschicht besonders erschwert war.

Durch Multiplication der specifischen Drehungen der einzelnen Salze mit dem betreffenden Molekulargewicht erhält man die molecularen Drehungen der Salze. Um nicht mit zu grossen Zahlen zu thun zu haben, habe ich dieselben nach dem Vorgange von Perkin auf die molecularare Drehung des Wassers als Einheit bezogen. Die so erhaltenen Werthe sind:

Chloride

Chlorwasserstoff	4,67
Chlorlithium	4,61
Chlornatrium	5,36
Chlorkalium	5,66
Chlорcalcium	$9,39 = 2 \times 4,695$
Chlorstrontium	$9,71 = 2 \times 4,855$
Chlorbarium	$10,094 = 2 \times 5,047$
Chlорcadmium	$11,78 = 2 \times 5,89$
Chlormangan	$9,04 = 2 \times 4,52$

Bromide

Bromnatrium	9,19
Bromkalium	9,36
Bromcalcium	$17,605 = 2 \times 8,803$
Bromstrontium	$18,163 = 2 \times 9,082$
Brombarium	$18,54 = 2 \times 9,27$
Bromcadmium	$19,70 = 2 \times 9,85$

Jodide

Jodnatrium	18,46
Jodkalium	18,95
Jodcadmium	$40,89 = 2 \times 20,445$

Nitrate

Natriumnitrat	1,37
Kaliumnitrat	1,35

Carbonate

Natriumcarbonat	3,53
Kaliumcarbonat	3,55

Sulfate

Lithiumsulfat	2,27
Natriumsulfat	3,54
Kaliumsulfat	3,57
Berylliumsulfat	1,83
Cadmiumsulfat	5,17
Mangansulfat	2,28

Aus diesen Zahlen geht zunächst hervor, dass für die Chloride, die Bromide, die Jodide, die Niträte und die Carbonate der verschiedenen Metalle die von äquivalenten Mengen der Salze hervorgerufenen Drehungen angenähert gleich gross sind. Ferner ergiebt sich die Drehung der Bromide angenähert doppelt so gross und die der Jodide angenähert viermal so gross, als die Drehung der Chloride. Für die Sulfate weichen die einzelnen Werthe nicht unbedeutend voneinander ab.

Untersucht man die Werthe der molecularen Drehungen der einzelnen Salze mit gleichen electropositiven, aber ver-

schiedenen electronegativen Bestandtheilen etwas genauer, so ergibt sich, dass dieselben um constante Differenzen voneinander abweichen: die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene gehört also zu den additiven Eigenschaften der gelösten Salze. Dieses Resultat konnte auf Grund der bisherigen Untersuchungen von Perkin wohl von vornherein erwartet werden.

Die Werthe der besagten Differenzen sind:

NaBr - NaCl = 3,83	NaJ - NaCl = 13,10	LiCl - $\frac{1}{2}$ Li ₂ SO ₄ = 3,475
KBr - KCl = 3,70	KJ - KCl = 13,29	NaCl - $\frac{1}{2}$ Na ₂ SO ₄ = 3,59
$\frac{1}{2}$ CaBr ₂ - $\frac{1}{2}$ CaCl ₂ = 4,108	$\frac{1}{2}$ CdJ ₂ - $\frac{1}{2}$ CdCl ₂ = 14,555	KCl - $\frac{1}{2}$ K ₂ SO ₄ = 8,875
$\frac{1}{2}$ SrBr ₂ - $\frac{1}{2}$ SrCl ₂ = 4,227	NaCl - NaNO ₃ = 3,99	$\frac{1}{2}$ MnCl ₂ - $\frac{1}{2}$ MnSO ₄ = 3,28
$\frac{1}{2}$ BaBr ₂ - $\frac{1}{2}$ BaCl ₂ = 3,80	KCl - KNO ₃ = 4,31	$\frac{1}{2}$ CdCl ₂ - $\frac{1}{2}$ CdSO ₄ = 3,305
$\frac{1}{2}$ CdBr ₂ - $\frac{1}{2}$ CdCl ₂ = 3,96	NaCl - $\frac{1}{2}$ Na ₂ CO ₃ = 3,595	
	KCl - $\frac{1}{2}$ K ₂ CO ₃ = 3,885	

Bei seinen ausgedehnten Untersuchungen über die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene in flüssigen organischen Verbindungen ist Perkin zu ganz analogen Resultaten geführt worden. Auffallend ist nur, dass die Differenzen Submultipla derjenigen sind, die Perkin und ich für anorganische Verbindungen gefunden haben. Ich habe selber bei Gelegenheit alsbald näher zu besprechender Versuche die molekulare Drehung einiger flüssiger Verbindungen bestimmt und bin dabei zu ganz denselben Resultaten geführt worden wie Perkin. So ergab sich die molekulare Drehung von:

	Perkin	Jahn
Aethylenbromid	9,700	9,730
Aethylenchlorid	5,485	5,408
	$\Delta = 4,215$	4,322
	$= 2 \times 2,108$	$= 2 \times 2,161$
Bromoform	11,626	11,538
Chloroform	5,559	5,559
	$\Delta = 6,067$	5,979
	$= 3 \times 2,022$	$= 3 \times 1,998$

Die Differenz ist also für ein Atom der in den Verbindungen enthaltenen Halogene nur die Hälfte derjenigen, welche sich bei den anorganischen Verbindungen ergeben hat. Für die Differenz zwischen dem Chlorid und dem Nitrat desselben Radicales ergab sich:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Amylchlorid} & . . 7,149 \text{ (7,168 nach Perkin)} \\
 \text{Amylnitrat} & . . 6,185 \\
 A & = 0,964
 \end{array}$$

Hier beträgt die Differenz also nur den vierten Theil derjenigen, die sich oben für die Chloride und die Niträte des Natrium, resp. des Kalium ergeben hatten.

Der Gedanke lag nahe, dass bei diesen Erscheinungen der Zustand der electrolytischen Dissociation eine Rolle spiele, in dem sich die gelösten Salze befinden, und Ostwald hat auch dadurch die Abweichungen zu erklären versucht. Dieser Frage etwas näher zu treten, schien mir nicht ohne Interesse zu sein.

Raoult hat für eine Reihe von Salzen nachgewiesen, dass ihren alkoholischen Lösungen die normale Dampfdruckerniedrigung zukommt, dass sie also innerhalb dieser Lösungen nicht oder doch wenigstens nur in sehr viel geringerem Grade electrolytisch dissociirt sein können, als in ihren wässerigen Lösungen. Hat nun der Dissociationszustand wirklich einen Einfluss auf das Drehungsvermögen der Salze, so mussten dieselben in ihren alkoholischen Lösungen jedenfalls ein anderes Drehungsvermögen zeigen, als oben für die Lösungen in Wasser gefunden ist. Für diese Versuche eigneten sich besonders die drei Halogenverbindungen des Cadmium, da sie sich ohne Zersetzung entwärtern lassen und auch relativ leicht in absolutem Alkohol löslich sind. Meine Versuche mit alkoholischen Lösungen ergaben:

Tabelle IV.

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>S</i>
SrCl ₂ I	0,82881	0,02087 g SrCl ₂	0,7429	66,01	88,86	
			0,7276	64,67	88,88	
			0,7218	63,57	88,13	
	0,83266	0,02282 g SrCl ₂			Mittel 88,62	1,0013
			0,6695	60,00	89,62	
			0,7112	63,57	89,38	
			0,7155	63,65	88,97	
				Mittel 89,32	1,1340	
					Mittel 1,0677	

(Fortsetzung der Tabelle IV.)

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>s</i>
CdCl ₂	0,83168	0,03129 g CdCl ₂	0,7255 0,6828	63,62 61,55	87,69 90,16	
				Mittel	89,43	1,1856
CdBr ₂ I	1,0164	0,27097 g CdBr ₂	0,6938 0,6597 0,6804	88,5 79,97 80,87	120,35 121,22 118,86	
				Mittel	120,14	1,3688
II	0,94361	0,16088 g CdBr ₂	0,7016 0,8874 0,6370	74,23 73,04 67,80	105,80 106,26 106,43	
				Mittel	106,16	1,3880
				Mittel		1,3784
CdJ ₂ I	1,1007	0,3567 g CdJ ₂	0,7068 0,7264 0,7330	106,85 107,49 110,60	151,16 147,98 150,90	
				Mittel	150,01	1,9716
II	0,94898	0,1817 g CdJ ₂	0,6776 0,7123 0,7297	80,07 88,85 85,80	118,17 117,72 117,58	
				Mittel	117,82	1,9670
				Mittel		1,9693

Vergleicht man die spezifischen Drehungen der in Alkohol gelösten Salze mit denen, die sich oben aus den wässrigen Lösungen ergeben hatten:

	In Wasser gelöst	In Alkohol gelöst
Chlorstrontium . . .	1,0969	1,0877
Chlorcadmium . . .	1,1535	1,1856
Bromcadmium . . .	1,3044	1,3784
Jodecadmium . . .	2,0133	1,9693

so wird man nicht Anstand nehmen, dieselben für identisch zu erklären.

Dieses Resultat steht nicht im Einklange mit Beobachtungen von Quincke, der eine Abhängigkeit des spezifischen Drehungsvermögens von der chemischen Natur des Lösungsmittels für das Chlorid und das Sulfat des Mangan constatirt hat, und zwar ergab sich die spezifische Drehung der genannten Salze etwas niedriger in der alkoholischen als in der wässrigen Lösung. Ich habe ähnliches für die Bromide des Calcium und des Strontium beobachtet.

Tabelle V.

Aufgelöste Substanz	<i>d</i>	Menge der in der Volumeneinheit der Lösung enthaltenen Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>s</i>
CaBr ₂ I	0,99833	0,20791 g CaBr ₂	0,6758	78,32	115,90	
			0,6733	77,98	115,82	
			0,6938	80,42	115,72	
	II	0,09178 g CaBr ₂			Mittel 115,88	1,4924
			0,6496	63,07	97,99	
			0,6698	66,47	99,00	
			0,6472	64,55	99,73	
				Mittel 98,61	1,4752	
					Mittel 1,4838	
SrBr ₂ I	0,96522	0,17356 g SrBr ₂	0,7913	88,75	105,84	
			0,7763	82,12	108,79	
			0,7823	82,90	105,96	
	II	0,08905 g SrBr ₂			Mittel 105,86	1,2140
			0,7118	67,80	95,25	
			0,7251	69,00	95,16	
			0,7355	69,85	94,97	
				Mittel 95,13	1,1352	
					Mittel 1,1746	

Hier hat es also den Anschein, als wenn eine Verminderung der specifischen Drehung eingetreten wäre, denn es ergibt sich:

	In Wasser gelöst	In Alkohol gelöst
Bromcalcium	1,5854	1,4838
Bromstrontium	1,3235	1,1746

Allein ich nehme doch Anstand, auf eine wirkliche Aenderung des Drehungsvermögens der betreffenden Salze aus diesen Versuchen zu schliessen. Die beiden fraglichen Salze sind nicht ohne partielle Zersetzung zu entwässern und ein Wassergehalt der Lösung muss die specifische Drehung des Salzes zu klein erscheinen lassen, da das gesammte Lösungsmittel als Alkohol in Rechnung gebracht wird, demselben also eine grössere specifische Drehung zugeschrieben wird, als es wirklich besitzt. Wie dem auch sei, so sind doch die Abweichungen auch bei den zuletzt angeführten Salzen viel zu gering, um einen nennenswerthen Einfluss des Dissociationszustandes der gelösten Salze auf ihr specifisches Drehungsvermögen annehmen zu können. Es liegt mir fern, aus

diesen Beobachtungen irgend eine Instanz gegen die Theorie der electrolytischen Dissociation herleiten zu wollen. So viel scheinen mir dieselben aber zu beweisen, dass die tiefgehenden Unterschiede, die von Perkin und mir bezüglich des Verhaltens der organischen Flüssigkeiten und der Salslösungen nachgewiesen sind, nicht allein dem electrolytischen Dissociationszustand der letzteren zugeschrieben werden können, da der Einfluss desselben auf die electromagnetische Drehung jedenfalls nur ein untergeordneter zu sein scheint.

Was den merkwürdigen Versuch von Perkin anbelangt, demzufolge die specifische Drehung von in Amyläther gelöstem Chlorwasserstoff nur halb so gross ist als die, welche sich aus der wässerigen Lösung dieser Säure ergibt, so wäre doch erst nachzuweisen, ob wirklich eine Lösung von Chlorwasserstoff in Amyläther vorlag, oder ob sich nicht der grösste Theil zu Amylchlorid und Amylalkohol umgesetzt hatte. Die Beobachtung von Silva, der zufolge bei 0° mit Jodwasserstoff gesättigter Aethyläther reichliche Mengen von Aethyljodid liefert, scheint mir Zweifel an der Beweiskraft des Perkin'schen Versuches zu begründen.

Beziehungen zwischen der electromagnetischen Drehung und den Refractionsconstanten der betreffenden Flüssigkeiten.

Kurze Zeit, nachdem Faraday die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene entdeckt hatte, wies Airy darauf hin, dass man eine befriedigende mathematische Beschreibung der Erscheinungen gewinnt, wenn man zu den allgemeinen Bewegungsgleichungen einer in der Richtung der z -Axe sich fortpflanzenden ebenen Welle:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = A \frac{d^2\xi}{dz^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = A \frac{d^2\eta}{dz^2}$$

Differentialausdrücke addirt, die in Bezug auf die Zeit von ungerader, in Bezug auf das z aber von gerader Ordnung sind, also z. B.:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = A \frac{d^2\xi}{dz^2} + m \frac{d^3\eta}{dt dz^2},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = A \frac{d^2\eta}{dz^2} - m \frac{d^3\xi}{dt dz^2}.$$

„ m “ bezeichnet eine von der Zusammensetzung der betreffenden Substanz abhängige Grösse, die der mit der Richtung des Lichtstrahles coincidirenden Componente der auf die Flüssigkeit wirkenden magnetischen Kraft proportional sein muss. Von den verschiedenen Differentialgleichungen dieser Art, die man bilden kann, sind die soeben angeführten die wahrscheinlicheren, da, wie Maxwell und Rowland nachgewiesen haben, die Theorie der Molecularwirbel, sowie die electromagnetische Lichttheorie zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Durch Integration dieser Gleichungen erhält man für die Drehung der Polarisationsebene den Ausdruck:

$$w = \frac{4\pi n^2}{V\lambda^2} m \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right),$$

wenn V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, λ die Wellenlänge im Vacuum, n den Brechungscoefficienten der betreffenden Substanz für dieselbe Lichtart bezeichnet, für welche die electromagnetische Drehung der Polarisationsebene bestimmt ist.

Diese Gleichung stellt, wie Verdet u. A. nachgewiesen haben, die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge der benutzten Lichtart mit ziemlich grosser Annäherung dar. Man hat aber bisher noch nicht untersucht, zu welchen Schlüssen bezüglich des Factor „ m “ diese Gleichung für die verschiedenen Substanzen führt. Ich bestimmte zu dem Ende die electromagnetische Drehung für eine Reihe diamagnetischer Flüssigkeiten ausser denjenigen, die bereits früher zu anderen Zwecken untersucht waren. Die Resultate dieser Messungen sind:

Tabelle VI.

Substanz	J	D	$w = \frac{D}{J}$	d
Propylalkohol .	0,6852	62,6	91,37	
	0,6848	61,75	90,18	
	0,6637	60,4	91,01	
		Mittel	90,85	0,80562
Isobutylalkohol .	0,7371	68,8	99,34	
	0,7358	69,3	94,18	
	0,7419	69,99	94,34	
		Mittel	98,99	0,80352

(Fortsetzung der Tabelle VI.)

Substanz	<i>J</i>	<i>D</i>	$w = \frac{D}{J}$	<i>d</i>
Amylalkohol . .	0,6874	66,52	96,76	
	0,6736	65,45	97,16	
	0,6879	66,85	97,18	
		Mittel	97,03	0,81215
Amylechlorid . .	0,6441	68,05	105,65	
	0,6513	68,80	105,88	
	0,6451	68,35	105,95	
		Mittel	105,83	0,8755
Amylnitrat . .	0,7137	60,65	84,75	
	0,7135	59,70	83,67	
	0,7216	59,60	82,59	
		Mittel	83,67	0,99991
Chloroform . .	0,6959	87,40	125,60	
	0,7313	90,25	123,35	
	0,6955	86,00	123,65	
		Mittel	124,20	1,4848
Bromoform . .	0,6177	141,90	229,73	
	0,6157	143,70	233,40	
	0,6309	146,85	232,77	
		Mittel	231,97	2,8288
Aethylchlorid . .	0,6899	85,20	123,50	
	0,7074	87,70	123,97	
	0,7063	87,70	124,16	
		Mittel	123,84	1,2582
Aethylbromid . .	0,6710	136,95	204,08	
	0,6739	137,25	203,66	
	0,6646	134,50	202,38	
		Mittel	203,38	2,1817
Aethyläther . .	0,6785	56,33	83,02	
	0,7021	58,95	83,97	
	0,6904	57,65	83,50	
		Mittel	83,50	0,71535
Schwefelkohlen- stoff . .	0,6300	200,00	317,46	
	0,6477	204,60	315,90	
	0,6467	204,60	316,38	
		Mittel	316,58	1,2662

Für dieselben Flüssigkeiten, sowie für die früher untersuchten Mischungen wurden nun nach der Methode der kleinsten Ablenkung die Brechungscoefficienten mit Hilfe eines ausgezeichneten Spectrometers für die rothe und die grüne Wasserstofflinie, sowie für Natriumlicht ermittelt. In der folgenden Tabelle bezeichnet:

n_α den Brechungscoefficienten für H_α

n_D " " " D

n_β " " " H_β ,

A und B die Constanten der Cauchy'schen Dispersionsformel:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

n'_D den mit Hülfe dieser Formel für D berechneten Brechungscoefficienten.

Die Temperatur bei diesen Messungen war stets angehähert 20° .

Tabelle VII.

Substanz	n_α	n_D	n_β	A	B	n'_D
Wasser	1,3315	1,3332	1,3375	1,3242	0,3140	1,3332
Methylalkohol . . .	1,3275	1,3290	1,3330	1,3210	0,2826	1,3290
Aethylalkohol . . .	1,3591	1,3610	1,3651	1,3517	0,3170	1,3608
Propylalkohol . . .	1,3840	1,3856	1,3905	1,3760	0,3428	1,3859
Isobutylalkohol . . .	1,3948	1,3966	1,4016	1,3865	0,3578	1,3968
Amylalkohol	1,4066	1,4086	1,4135	1,3978	0,3713	1,4085
Amylchlorid	1,4032	1,4102	1,4156	1,3993	0,3842	1,4104
Amylnitrat	1,4122	1,4142	1,4203	1,4023	0,4251	1,4143
Chloroform	1,4452	1,4472	1,4541	1,4344	0,4653	1,4478
Bromoform	1,5838	1,5890	1,6014	1,5625	0,9207	1,5890
Aethylenchlorid . .	1,4440	1,4463	1,4524	1,4337	0,4414	1,4464
Aethylenbromid . .	1,5356	1,5403	1,5498	1,5183	0,7457	1,5398
Aethyläther	1,3519	1,3538	1,3580	1,3445	0,3180	1,3535
Aceton	1,3578	1,3602	1,3644	1,3497	0,3492	1,3597
Benzol	1,4972	1,5017	1,5140	1,4768	0,8786	1,5021
Toluol	1,4929	1,4964	1,5070	1,4758	0,7859	1,4970
Xylo	1,4935	1,4976	1,5091	1,4744	0,8193	1,4980
Schwefelkohlenstoff .	1,6192	1,6284	1,6534	1,5776	1,7915	1,6292
Aceton + Wasser . .	1,3467	1,3485	1,3530	1,3391	0,3295	1,3486
" + Alkohol . .	1,3612	1,3627	1,3675	1,3536	0,3287	1,3631
" + Benzol . .	1,4550	1,4586	1,4686	1,4886	0,7085	1,4590
Benzol + Alkohol .	1,4049	1,4074	1,4142	1,3935	0,4904	1,4076
" + Methylalkohol .	1,3774	1,3798	1,3860	1,3670	0,4487	1,3799
Toluol + Alkohol .	1,4083	1,4114	1,4178	1,3968	0,4960	1,4111
Xylo + Alkohol .	1,3985	1,4014	1,4073	1,3880	0,4558	1,4011

Die auch für die stärker zerstreuenden Substanzen vollständig befriedigende Uebereinstimmung zwischen dem beobachteten und berechneten Brechungscoefficienten für die Natriumlinie beweist, dass die zweigliedrige Cauchy'sche Formel die Erscheinungen für die fraglichen Substanzen in vollkommen ausreichender Weise darstellt. Es ist demnach:

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2 \frac{B}{\lambda^3},$$

sodass unsere obige Formel die Gestalt annimmt:

$$w = \frac{4\pi^2 n^2}{V \lambda^2} m \left(n + \frac{2B}{\lambda^2} \right).$$

Berechnet man nun für die einzelnen Substanzen, um alles auf gleiche Gewichtsmengen zu reduciren, den Quotienten:

$$m = \frac{w}{\frac{4\pi^2 n^2}{V \lambda^2} \left(n + \frac{2B}{\lambda^2} \right) d}$$

und setzt den für Wasser erhaltenen Werth gleich 1, so ergibt sich:

	<i>m</i>	<i>M</i>		<i>m</i>	<i>M</i>
Wasser	1	1	Bromoform	0,47644	0,458
Methylalkohol	0,90322	0,960	Aethylenchlorid	0,7688	0,832
Aethylalkohol	1,0077	1,028	Aethylenbromid	0,5967	0,573
Propylalkohol	1,0050	1,062	Aethyläther	1,1163	1,108
Isobutylalkohol	1,0222	1,089	Aceton	1,0041	0,815
Amylalkohol	1,0127	1,092	Benzol	1,7477	0,9315
Amylchlorid	1,0393	1,039	Toluol	1,6495	—
Amylnitrat	0,69946	0,864	Xylo	1,5121	—
Chloroform	0,65153	0,676	Schwefelkohlenstoff	1,3093	0,781

Ueber den Werthen für „*m*“ sind unter „*M*“ die Werthe verzeichnet, welche Henrichsen für den specifischen Magnetismus der betreffenden Flüssigkeiten erhalten hat, nur der Werth für Benzol ist einer Arbeit von Quincke entnommen. Ein Vergleich der beiden Zahlenreihen lehrt, dass für die Substanzen der Fettreihe der Factor „*m*“ dem specifischen Magnetismus sehr angenähert proportional ist. Grössere Abweichungen ergeben sich nur für das Amylnitrat und das Aceton. Was das erstere anbetrifft, so könnte die Abweichung auf nicht vollkommene Reinheit des zu Gebote stehenden Präparates zurückzuführen sein: dasselbe zeigte optische Aktivität, war also jedenfalls ein Gemenge.

Benzol, seine beiden Homologen und Schwefelkohlenstoff fügen sich der Formel durchaus nicht, denn das „*m*“ ist nahezu doppelt so gross wie das „*M*“. Ob diese starken Abweichungen darauf zurückzuführen sind, dass die vereinfachenden Annahmen, die der Formel zu Grunde liegen, nicht vollständig zutreffen, wage ich nicht zu entscheiden, und zwar um so weniger, als gegen die allgemeine Gültigkeit der Formel überhaupt Zweifel nicht ausgeschlossen sind. Besonders für die Erklärung der Drehung in magnetischen Flüssigkeiten bieten sich Schwierigkeiten, da dieselbe durchaus nicht immer von entgegengesetztem Vorzeichen ist, wie die in diamagnetischen Flüssigkeiten.

Berechnet man das „ m “ für die sieben untersuchten Lösungen organischer Substanzen, so erhält man:

		beob.	m berechn.
Aceton + Wasser	...	0,9706	1,0008
" + Alkohol	...	1,0197	1,0067
" + Benzol	...	1,5788	1,5316
Benzol + Alkohol	...	1,3206	1,2610
" + Methylalkohol	...	1,2585	1,1728
Toluol + Alkohol	...	1,2877	1,2455
Xylo + Alkohol	...	1,1881	1,1589

Unter „berechnet“ sind die Werthe der fraglichen Grösse verzeichnet, die sich unter der Voraussetzung ergeben, dass jeder Bestandtheil der Mischung nach Maassgabe seiner in der Gewichtseinheit der Lösung vorhandenen Menge zu dem der Lösung eigenthümlichen Werthe von „ m “ beiträgt. Die ziemlich gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen erweist, dass diese Voraussetzung für die untersuchten Substanzen zutrifft.

Ich habe endlich für die meisten der von mir auf ihr electromagnetisches Drehungsvermögen untersuchten Salzlösungen gleichfalls die Refractionsconstanten ermittelt. Die Resultate dieser Messungen, die möglicherweise für spätere Untersuchungen von Nutzen sein könnten, sind in der nachstehenden Tabelle verzeichnet.

Tabelle VIII.

Aufgelöste Substanz		n_a	n_D	n_B	A	B	n'_D
HCl	I	1,3472	1,3493	1,3540	1,3395	0,3331	1,3491
	II	1,3393	1,3413	1,3455	1,3316	0,3299	1,3411
LiCl	I	1,3536	1,3557	1,3605	1,3453	0,3590	1,3556
	II	1,3430	1,3450	1,3495	1,3351	0,3403	1,3449
Li ₂ SO ₄	I	1,3647	1,3667	1,3711	1,3569	0,3350	1,3666
	II	1,3499	1,3519	1,3562	1,3422	0,3297	1,3517
NaCl	I	1,3512	1,3532	1,3579	1,3430	0,3507	1,3531
	II	1,3417	1,3437	1,3481	1,3339	0,3351	1,3436
NaBr	I	1,3551	1,3572	1,3623	1,3464	0,3770	1,3573
	II	1,3461	1,3482	1,3528	1,3380	0,3507	1,3481
NaJ	I	1,3675	1,3700	1,3760	1,3571	0,4476	1,3700
	II	1,3536	1,3559	1,3612	1,3445	0,3945	1,3559
NaNO ₃		1,3523	1,3544	1,3592	1,3439	0,3611	1,3543
Na ₂ SO ₄		1,3422	1,3441	1,3488	1,3348	0,3193	1,3440
Na ₂ CO ₃	I	1,3539	1,3559	1,3645	1,3458	0,3455	1,3558
	II	1,3436	1,3455	1,3498	1,3361	0,3244	1,3452

(Fortsetzung der Tabelle VIII.)

Aufgelöste Substanz		n_{α}	D	n_{β}	A	B	n'_D
KCl	I	1,3466	1,3486	1,3530	1,3387	0,3392	1,3485
	II	1,3376	1,3395	1,3438	1,3301	0,3235	1,3394
KBr	I	1,3543	1,3565	1,3615	1,3455	0,3767	1,3564
	II	1,3457	1,3477	1,3524	1,3375	0,3505	1,3476
KJ	I	1,3728	1,3753	1,3817	1,3619	0,4660	1,3753
	II	1,3533	1,3555	1,3608	1,3448	0,3926	1,3556
KNO ₃		1,3407	1,3427	1,3471	1,3329	0,3349	1,3426
K ₂ SO ₄		1,3388	1,3407	1,3449	1,3314	0,3194	1,3406
K ₂ CO ₃		1,3656	1,3675	1,3723	1,3574	0,3508	1,3675
CaCl ₂	I	1,3738	1,3761	1,3811	1,3649	0,3822	1,3759
	II	1,3552	1,3572	1,3619	1,3470	0,3507	1,3571
CaBr ₂	I	1,3812	1,3836	1,3893	1,3712	0,4271	1,3885
	II	1,3583	1,3604	1,3654	1,3495	0,3758	1,3603
SrCl ₂	I	1,3690	1,3712	1,3761	1,3608	0,3713	1,3715
	II	1,3493	1,3512	1,3558	1,3414	0,3502	1,3515
SrBr ₂	I	1,3765	1,3820	1,3875	1,3700	0,4167	1,3820
	II	1,3552	1,3573	1,3622	1,3467	0,3660	1,3572
BaCl ₂	I	1,3779	1,3801	1,3852	1,3690	0,3820	1,3800
	II	1,3536	1,3556	1,3602	1,3455	0,3455	1,3555
BaBr ₂	I	1,4086	1,4113	1,4178	1,3974	0,4816	1,4113
	II	1,3728	1,3751	1,3805	1,3634	0,4030	1,3750
MnCl ₂	I	1,3800	1,3823	1,3876	1,3707	0,3993	1,3822
	II	1,3536	1,3556	1,3603	1,3454	0,3525	1,3556
MnSO ₄	I	1,3731	1,3751	1,3798	1,3650	0,3507	1,3751
	II	1,3558	1,3577	1,3622	1,3480	0,3349	1,3576
CdCl ₂	I	1,3884	1,3908	1,3964	1,3788	0,4174	1,3908
	II	1,3799	1,3828	1,3876	1,3705	0,4044	1,3822
	III	1,3629	1,3650	1,3700	1,3548	0,3695	1,3649
CdBr ₂	IV	1,3577	1,3599	1,3646	1,3494	0,3578	1,3597
	I	1,3793	1,3817	1,3876	1,3692	0,4346	1,3817
CdJ ₂	II	1,3550	1,3572	1,3621	1,3464	0,3718	1,3571
	I	1,4142	1,4176	1,4263	1,3995	0,6332	1,4177
CdSO ₄	II	1,3755	1,3782	1,3847	1,3643	0,4815	1,3782
	I	1,3556	1,3580	1,3634	1,3461	0,4084	1,3579
BeSO ₄	I	1,3549	1,3568	1,3613	1,3470	0,3370	1,3567
	II	1,3435	1,3454	1,3497	1,3360	0,3242	1,3453
Alkoholische Lösungen.							
CaBr ₂	I	1,3980	1,4001	1,4056	1,3887	0,4014	1,4002
	II	1,3784	1,3803	1,3853	1,3701	0,3569	1,3804
SrCl ₂	I	1,3657	1,3675	1,3720	1,3581	0,3274	1,3675
	II	1,3665	1,3682	1,3728	1,3589	0,3269	1,3683
SrBr ₂	I	1,3872	1,3896	1,3949	1,3780	0,3989	1,3895
	II	1,3752	1,3770	1,3819	1,3671	0,3497	1,3772
CdBr ₂	I	1,3950	1,3970	1,4027	1,3856	0,4037	1,3972
	I	1,4059	1,4083	1,4152	1,3945	0,4902	1,4086
CdJ ₂	II	1,3834	1,3864	1,3920	1,3730	0,4485	1,3859

Auf Grund dieser Daten berechnen sich für den Factor „*m*“ der obigen Formel die folgenden Werthe:

Aufgelöste Substanz	<i>m</i>	Aufgelöste Substanz	<i>m</i>
HCl I . . .	1,0288	SrBr ₂ I . . .	0,9748
II . . .	1,0299	II . . .	0,9919
LiCl I . . .	1,0470	BaCl ₂ I . . .	0,9091
II . . .	1,0232	II . . .	0,9429
Li ₂ SO ₄ I . . .	0,8178	BaBr ₂ I . . .	0,8817
II . . .	0,8916	II . . .	0,9394
NaCl I . . .	1,0282	MnCl ₂ I . . .	0,9402
II . . .	1,0180	II . . .	0,9851
NaBr I . . .	1,0385	MnSO ₄ I . . .	0,7648
II . . .	1,0268	II . . .	0,8519
NaJ I . . .	1,1573	CdCl ₂ I . . .	0,9284
II . . .	1,1160	II . . .	0,9444
NaNO ₃ . . .	0,8521	III . . .	0,9578
Na ₂ SO ₄ . . .	0,9374	IV . . .	0,9679
Na ₂ CO ₃ I . . .	0,9118	CdBr ₂ I . . .	0,9737
II . . .	0,9471	II . . .	0,9958
KCl I . . .	1,0056	CdJ ₂ I . . .	1,1924
II . . .	1,0057	II . . .	1,1481
KBr I . . .	1,0193	III . . .	1,0919
II . . .	1,0152	CdSO ₄ I . . .	0,8461
KJ I . . .	1,1618	II . . .	0,9229
II . . .	1,1073		
KNO ₃ . . .	0,9041	Alkoholische Lösungen	
K ₂ SO ₄ . . .	0,9468	CaBr ₂ I . . .	1,0003
K ₂ CO ₃ . . .	0,8250	II . . .	1,0026
BeSO ₄ I . . .	0,7931	SrCl ₂ I . . .	0,9917
II . . .	0,8819	II . . .	0,9934
CaCl ₂ I . . .	0,9851	SrBr ₂ I . . .	0,9668
II . . .	0,9980	II . . .	0,9779
CaBr ₂ I . . .	1,0164	CdBr ₂ I . . .	0,9960
II . . .	1,0231	CdJ ₂ I . . .	1,1501
SrCl ₂ I . . .	0,9387	II . . .	1,0998
II . . .	0,9728		

Die so erhaltenen Werthe von „*m*“ schwanken innerhalb nicht sehr weiter Grenzen um den Werth 1. Eine weitere Discussion dieser Zahlen scheint mir angesichts der Zweifel betreffend die allgemeine Gültigkeit der ihnen zu Grunde liegenden Formel ohne Interesse zu sein.

Berlin, März 1891.

V. Zur Thermochemie der Rechts- und Linkswiessäure; von Hans Jahn.

Schon Pasteur hat darauf hingewiesen, dass die Weinsäure sich vorzugsweise mit Basen von entgegengesetzter optischer Aktivität zu schön krystallisirenden Verbindungen vereinigt. So gibt das Asparagin ein gut krystallisirendes Linkstartrat, während das Rechtstartrat zu einem Gummi eintrocknet.

Bremer hat auf dieses Verhalten eine Methode zur Spaltung der Traubensäure in ihre beiden Componenten begründet, die leichter und sicherer zum Ziele führt, als die bis dahin fast ausschliesslich gebräuchliche, welche auf der Krystallisation des traubensauren Ammoniaknatriumsalzes beruht.

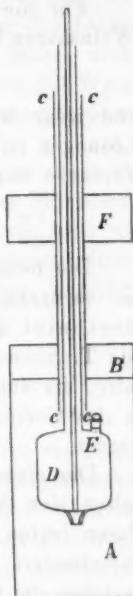
Löst man moleculare Mengen von Traubensäure und krystallisirem Cinchonin in heissem Wasser auf, so krystallisiert beim Erkalten vorzugsweise das Linkstartrat des Cinchonin in schönen concentrisch gruppirten Nadeln heraus. Man krystallisiert dieses Salz ein oder zwei Mal aus siedendem Alkohol um, in welchem das Linkstartrat schwer, das Rechtstartrat dagegen sehr leicht löslich ist, um das erstere im Zustande vollkommener Reinheit zu erhalten. Um daraus die Weinsäure abzuscheiden, zerlegt man das Salz mit Blei-acetat, filtrirt das ausgeschiedene Bleitartrat ab, wäscht es sorgfältig aus und zersetzt es mit Schwefelwasserstoff.

Die Spaltung der Traubensäure in die beiden Weinsäuren geht schon beim Auflösen der ersten in Wasser vor sich. Mischt man innerhalb eines Calorimeters die gelösten Weinsäuren in molekularen Mengen, so beobachtet man keinerlei Wärmetönung.

Ich habe diese schon vor längerer Zeit von Berthelot und Jungfleisch beobachtete Thatsache vollständig bestätigt gefunden.

Ich bediente mich bei meinen Wärmemessungen des Bunsen'schen Eiscalorimeters. Zur Mischung der beiden

Lösungen benützte ich sowohl bei diesen als bei den später zu besprechenden Neutralisationsversuchen einen kleinen Apparat, der sich sehr gut bewährt hat, und dessen Beschreibung daher hier ihren Platz finden möge. *A* (s. Fig.) ist ein unten zugeschmolzenes Glasrohr, welches durch den durchbohrten Gummistopfen *B* verschlossen ist. Durch die Bohrung des Stopfens ist das weite Glasrohr *c* geführt, in welchem der lange Stiel des Gefäßes *D* sich auf und ab bewegen lässt. Dieses Gefäß hat einen konischen, durch einen eingeschliffenen Glasstöpsel verschliessbaren Ansatz. An dem Glasstöpsel ist ein langer Glasstab angelötet, der wie der Stiel des Gefäßes *D* aus dem Glasrohr *c* hervorragt. Der Gummistopfen *F* verschliesst das Aufnahmegeräß des Calorimeters.



Um den Apparat für den Versuch herzurichten, füllt man in die Röhre *A* die eine Flüssigkeit, in das Gefäß *D* die zweite und taucht die ganze Vorrichtung, während man das Gefäß *D* über dem Flüssigkeitsniveau in *A* schwebend erhält, in das Calorimeter. Nachdem die Temperaturunterschiede sich ausgeglichen haben, lüftet man den den konischen Ansatz des Gefäßes *D* verschliessenden Glasstöpsel und senkt dann das Gefäß in die Flüssigkeit ein. Behufs vollständiger Mischung der beiden Flüssigkeiten röhrt man durch Drehen des Gefäßes *D* oder man hebt und senkt das letztere einige Male, sodass durch das wiederholte Ausfliessen der Flüssigkeit die Mischung beschleunigt wird.

Man erhält auf diese Weise mit sehr kleinen Flüssigkeitsmengen sehr brauchbare Resultate.

So bestimmte ich die Neutralisationswärme der verdünnten Essigsäure mit verdünnter Natronlauge zu:

$$\left. \begin{array}{r} \text{I)} \quad 13,608 \\ \text{II)} \quad 13,637 \\ \text{Mittel} \quad 13,623 \end{array} \right\} \text{Cal.}$$

während Thomsen

13,395 Cal.

gefunden hatte. Die kleine Differenz röhrt offenbar daher, dass sich meine Zahl auf 0° C., Thomsen's dagegen auf 18° C. bezieht.

Für die Bestimmung der Mischungswärme der beiden Weinsäuren benützte ich Lösungen von der Zusammensetzung:



und zwar wurden bei jedem Versuche je 10 ccm dieser Lösungen mit einander gemischt. Die Resultate der beiden Versuche waren:

$$(+ C_4H_6O_6 \text{ aq}, - C_4H_6O_6 \text{ aq}) = \begin{cases} -0,10 \\ -0,09 \end{cases} \text{ Cal.}$$

Die beobachteten Wärmetönungen sind so gering, dass sie vernachlässigt werden können, die Beobachtung von Berthelot und Jungfleisch ist daher vollständig bestätigt. Die Traubensäure verhält sich mithin wie gewisse Doppel-salze, die auch nur im festen Zustande existiren, sich aber in ihre Componenten zerlegen, sowie sie in Lösung gebracht werden.

Die eingangs erwähnten Beobachtungen über das Verhalten der beiden Weinsäuren gegenüber optisch activen Basen legten den Gedanken nahe, ob nicht mit Hülfe des Calorimeters Energieunterschiede nachzuweisen wären, je nachdem die betreffende Basis mit der gleich oder entgegengesetzt drehenden Basis neutralisiert wird.

Ich habe zunächst Versuche mit dem stark linksdrehenden Morphin ausgeführt. Bei der Unlöslichkeit des Morphin in Wasser musste der Umweg gewählt werden, dass man das gelöste Tartrat mit Natronlauge im Calorimeter zerlegte, und zwar wurde ein Ueberschuss von Natronlauge angewendet, sodass sich das ursprünglich ausgeschiedene Morphin wieder vollständig löste. Hatte das Morphin, wie man vermuten konnte, für die Rechtsweinsäure eine grössere Neutralisationswärme, wie für die Linkswinsäure, so musste bei der Zersetzung des Rechtstartrates eine kleinere Wärme-menge entwickelt werden, wie bei der des Linkstartrates.

Die Versuche ergaben folgende Resultate:

Rechtstartrat		Linkstartrat	
I) 32,78		I) 33,39	
II) 32,74	Cal.	II) 33,62	Cal.
Mittel 32,76		Mittel 33,51	

Diese Versuche schienen in der That zu Gunsten der früher erörterten Voraussetzung zu sprechen. Allein die Energiedifferenz, die an und für sich schon gering ist, war umso weniger beweisend, als die Reindarstellung des Linkstartrates wegen der grossen Löslichkeit des Salzes nicht leicht ist. Eine geringe Verunreinigung des Salzes mit Weinsäure könnte die Verschiedenheit der Zersetzungswärme herbeigeführt haben.

In Anbetracht dieser Umstände hielt ich es sogar für wahrscheinlicher, dass die Neutralisationswärmen der beiden Säuren gleich gross seien. Versuche mit Nicotin, die um so beweisender waren, als die Neutralisationswärmen direct gemessen werden konnten, haben diese Annahme bestätigt. Die Resultate dieser Versuche waren folgende:

Rechtsweinsäure		Linkswinsäure	
I) 5,23		I) 5,07	
II) 5,15	Cal.	II) 5,12	Cal.
Mittel 5,19		Mittel 5,10	

Das stark linksdrehende Nicotin hat also für die beiden Weinsäuren dieselbe Neutralisationswärme. Die vermuteten Energiedifferenzen bestehen mithin nicht, sodass die Möglichkeit der Trennung der beiden Weinsäuren mit Hülfe der optisch activen Basen nur auf die verschiedene Löslichkeit der beiden Tartrate zurückzuführen ist. Dadurch wird auch die merkwürdige Beobachtung von Bremer verständlich, dass bei der Spaltung der inactiven Äpfelsäure durch Cinchonin immer das rechtsäpfelsaure Cinchonin zuerst auskrystallisiert.

Berlin, März 1891.

VI. Ueber den Durchgang der Electricität durch Gase.

3. Funkenentladungen von Condensatoren in normaler Luft; von Adolf Heydweiller.

1. Einleitung.

G. Kirchhoff¹⁾, C. Neumann²⁾ und Sir W. Thomson³⁾ haben bekanntlich die Gleichungen für die Electricitätsbewegung bei der Entladung eines Condensators abgeleitet. Die beiden letzteren nahmen dabei den selten verwirklichten Fall eines ununterbrochen leitenden Schliessungsbogens an; der erstere setzte zwar das Vorhandensein von Funkenstrecken voraus, machte aber über dieselben Annahmen, welche gewiss auch nicht annähernd zutreffen. In der That gelangte er auf Grund dieser Annahmen zu genau denselben Gleichungen, wie die beiden anderen Forscher für den ununterbrochenen Schliessungsbogen, sodass nach seiner Theorie die Anwesenheit von Funkenstrecken keinen Einfluss auf die Electricitätsbewegung ausüben würde. Hingegen deuten viele im Folgenden zu besprechende That-sachen darauf hin, dass dieser Einfluss ein recht erheblicher ist, und es soll hier versucht werden, denselben näher festzustellen.

Zu diesem Zwecke waren die entladenen Electricitätsmengen, die im Schliessungsbogen geleistete Gesamtarbeit, sowie die im Leitungswiderstand (als Joule'sche Wärme) und im Funken auftretenden Theile derselben, sämmtliche Grössen in ihrer Abhängigkeit von der Capacität des Condensators und dem Leitungswiderstand des Schliessungsbogens, zu bestimmen. Messungen dieser Grössen liegen zwar schon in grosser Anzahl vor (von Feddersen, Freyberg,

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. 121. p. 551. 1864. Ges. Abh. p. 168.

2) C. Neumann, Gött. Nachr. 1869. p. 17.

3) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 5. p. 393. 1855; Math. a. phys. pap. 1. p. 540.

von Oettingen, Paalzow, Riess, Schwedoff, Villari, Zomakion u. A.), indessen fehlte es noch an genaueren quantitativen Bestimmungen unter Zurückführung sämmtlicher in Betracht kommenden Grössen auf absolutes Maass, wie sie der vorliegende Zweck verlangt. In dieser Richtung sind hier die Thatsachen ergänzt worden; die dabei gewonnenen Ergebnisse sind natürlich zum Theil schon aus den früheren Arbeiten zu entnehmen.

2. Allgemeines über die Messungen.

Die Funkenentladungen von Condensatoren sind keine reinen Erscheinungen; ausser dem durch das Gas vermittelten Uebergang von Electricität, wird solche wahrscheinlich auch convectiv durch abgerissene Metalltheilchen übergeführt. Man darf wohl die stark leuchtenden scharfen Linien, welche den Anfang jedes Funkenbildes im rotirenden Spiegel begrenzen, dem letzteren Antheil zuschreiben, den mattleuchtenden continuirlichen Schimmer dagegen der eigentlichen Gasentladung. Indessen ist es sehr wahrscheinlich, dass auch hier, wie für den Inductionsfunken Perrot¹⁾ nachgewiesen hat, der convective Antheil sehr gering ist und nur Bedeutung gewinnt, wenn durch grossen Leitungswiderstand des Schliessungsbogens auch die Gasentladung auf einen kleinen Betrag herabgesetzt ist.

Ausserdem aber sind die Entladungen nur bei gewissen mittleren Leitungswiderständen des Schliessungsbogens einfach und continuirlich, wie die Betrachtung im rotirenden Spiegel, aber auch schon unmittelbar Aussehen und Geräusch des Funkens erkennen lassen. Bei kleineren Widerständen sind die Entladungen oscillirend, bei grösseren intermittirend nach Feddersen's Bezeichnung.

Die ersten waren bei den vorliegenden Messungen ausgeschlossen; die Widerstände sind stets erheblich grösser, als der von Feddersen sogenannte Grenzwiderstand, bei dem die einfache Entladung beginnt.

Die intermittirende Entladung besteht aus einer Reihe gleichgerichteter Partialentladungen, deren jede, wie das

1) Perrot, Ann. de chim. et de phys. (3) 61. p. 200. 1861.

Funkenbild im rotirenden Spiegel zeigt, von einem jener Metallfunken eingeleitet wird. Das Auftreten und die Anzahl dieser Entladungen scheint von vielen schwer zu beherrschenden Zufälligkeiten abzuhängen; im allgemeinen nimmt die Zahl der Partialentladungen mit wachsendem Leitungswiderstand des Schliessungsbogens zu.

Es ist von vornherein wahrscheinlich und wird sich im Folgenden bestätigen, dass einfache Gesetzmässigkeiten nur für die wirklich einfachen Entladungen bestehen, und dass dieselben um so mehr verdeckt werden, je grösser der Einfluss der nachfolgenden Partialentladungen wird. Glücklicherweise wird derselbe erst bei sehr grossen Widerständen erheblich; bei kleineren scheint der weitaus grössste Theil der gesammten entladenen Electricitätsmenge schon in der ersten Partialentladung überzugehen, während die folgenden nur einen geringen Anteil liefern; erst mit starker Abnahme der ersten Partialentladung bei grösssten Widerständen, wird dieser Anteil überwiegend.

Auch ausserdem treten bei der Funkenbildung Unregelmässigkeiten auf, über deren Ursache man keine genügende Rechenschaft geben kann, und welche auch andere Beobachter erwähnen.¹⁾ Messungen, die unter scheinbar gleichen Umständen angestellt waren, ergaben oft erhebliche Unterschiede; die Genauigkeit dieser Messungen ist daher leider eine sehr beschränkte und auch aus diesem Grunde kann man nur eine Annäherung an einfache Gesetze erwarten.

Jene Unregelmässigkeiten zeigen sich auch namentlich darin, dass im Verlauf einer längeren Beobachtungsreihe oft erhebliche Änderungen eintraten, sodass die Anfangswerthe mit den Endwerthen nicht immer direct vergleichbar waren. Es wurde daher jede Beobachtungsreihe in umgekehrter Folge wiederholt, und aus den entsprechenden Gruppen beider Reihen das Mittel genommen.

Immerhin scheinen mir die Funken geeigneter zum Studium der reinen Gasentladungen, als der continuirliche

1) Z. B. Feddersen, Beiträge zur Kenntniss des electrischen Funken. Kiel 1857. p. 18 ff.; Pogg. Ann. 113. p. 440. 1861. Freyberg, Wied. Ann. 38. p. 242. 1889.

Electricitätsübergang im Lichtbogen, in welchem, wie aus Hrn. Stenger's¹⁾ Mittheilungen folgt, wahrscheinlich Metalldämpfe die Leitung übernehmen.

3. Die Apparate.

Die Messapparate sind zum Theil (Galvanometer, Funkenmikrometer) in einer früheren Arbeit²⁾ schon benutzt worden, auf die bezüglich mancher Einzelheiten verwiesen werden kann.

Hier wurde der Wiedemann'schen Bussole der Kupferdämpfer wieder eingefügt, um die Magnettadel gegen electrostatische Einwirkungen zu schützen; übrigens waren die Drahtrollen, ebenso wie der Dämpfer, stets mit der Erde in leitender Verbindung. Nur zur Messung der entladenen Electricitätsmengen dienten die früher benutzten Rollen mit guttaperchaisolirtem Draht; dieselben blieben aber immer mit der Funkenstrecke in den Hauptschliessungsbogen des Condensators eingeschaltet, um eine constante Selbstinduction desselben zu haben. Für die Messung der zurückbleibenden Electricitätsmengen wurden dagegen andere Rollen mit je 4000 Windungen eines feineren Drahtes benutzt. — Besondere Aufmerksamkeit wurde darauf verwendet, dass die Entladungen kein Ummagnetisiren des empfindlichen astatischen Nadelsystems bewirkten, was durch Constanze des Nullpunktes und der Empfindlichkeit leicht festgestellt werden konnte.

Als Electroden der Funkenstrecke dienten hier Messingkugeln von nahe 0,5 cm Halbmesser mit 0,25 cm dicken Zuleitungsstäben; sie sind nicht genau abgedreht und der Krümmungsradius der einen ist an der Entladungsstelle etwas grösser, was bei den hier verwendeten kleinen Funkenstrecken (bis 0,3 cm) nicht in Betracht kommt. Vor jeder Beobachtungsreihe wurden sie frisch geputzt und polirt. Die Funken bildeten sich mit wenigen, besonders erwähnten Ausnahmen in freier, durch Luftheizung gewärmer, also ziemlich trockener Zimmerluft von 13—18° und 738—760 mm Druck. Die Beobachtungen fielen in die kältere Jahreszeit vor Mitte April.

1) Stenger, Wied. Ann. 25. p. 31. 1885.

2) Heydweiller, Wied. Ann. 38. p. 534. 1889.

Zu Widerständen über 0,5 Megohm wurden Hittorf'sche Jodkadmiumwiderstände¹⁾ (Lösung von Kadmiumjodid in Amylalkohol mit amalgamirten Kadmiumelectroden) verwandt, die kleineren aus Zinkvitriollösung mit amalgamirten Zinkelectroden hergestellt.

Als Condensatoren habe ich Leydener Flaschen aus sehr gut isolirendem Glase²⁾ benutzt, da sich der Einfluss der Rückstandsbildung durch die Versuchsanordnung leicht vermeiden liess. Luftcondensatoren wären in mancher Hinsicht vorzuziehen gewesen, doch hätten sie bei hinreichender Capacität und Schlagweite unbehülflich gross sein müssen, und Isolirungsmängel sind auch bei ihnen nicht völlig zu vermeiden. Zur Anwendung kamen zwei Flaschen von etwa 0,35 und 0,25 mm Glasdicke und je 2750 qcm innerer Belegung.

Dieselben wurden mittelst einer kleinen Holtz'schen Influenzmaschine mit einer rotirenden Scheibe von 40 cm Durchmesser und zwar immer negativ geladen. Der positive Pol der Maschine, wie die äussere Belegung der Flaschen waren stets zur Erde abgeleitet.

Für gut leitende Verbindungen der einzelnen Theile des Schliessungsbogens war Sorge getragen.

Um die nach der Funkenentladung in dem Condensator zurückgebliebenen Electricitätsmengen unabhängig vom Rückstande zu messen, bediente ich mich eines dem v. Liphart'schen Fallschlüssel³⁾ ähnlichen Ausladers. Derselbe besteht aus einem mit einer Bleikugel beschwerten, einarmigen Metallhebel, der mit der inneren Belegung der Flaschen leitend verbunden wird. Er kann an einem Seidenfaden hinaufgezogen werden bis zur Berührung mit einem Blech, das mit dem negativen Pole der Influenzmaschine in Verbindung steht; in dieser Lage des Hebels wird die Flasche geladen. Unmittelbar nach dem Funkenübergang lässt man den Faden los, der Hebel fällt und streift dabei ein federndes Blech,

1) Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 559. 1879.

2) 40 Volt gaben durch die Flaschen an einem sehr empfindlichen Galvanometer, das $2,7 \times 10^{-10}$ Amp. angezeigt hätte, keinen Ausschlag. Dementsprechend war auch die Rückstandsbildung gering.

3) v. Liphart, Pogg. Ann. 116. p. 513. 1862.

das durch das Galvanometer und einen geeigneten Widerstand (100 000 Ohm) zur Erde abgeleitet ist. Die Berührungszeit des Hebels mit dem Blech ist so geregelt, dass die Entladung eine vollständige ist, was durch Änderung des zugeschalteten Widerstandes und damit der Entladungsdauer leicht geprüft werden kann. Es wird dadurch erreicht, dass die innere Belegung der Flaschen unmittelbar nach dem Funkenübergang isolirt, dann durch das Galvanometer entladen und gleich darauf von diesem wieder getrennt wird. Der ganze Vorgang ist in einigen Zehntelsecunden beendet.

Zur Bestimmung der als Joule'sche Wärme auftretenden Stromarbeit kann man zwei Wege einschlagen, den dynamometrischen und den calorimetrischen. Ein zu derartigen absoluten Messungen geeignetes Dynamometer stand mir nicht zur Verfügung; hinreichende Empfindlichkeit, gute Isolirung und constante Dämpfung werden auch nur schwer gleichzeitig zu erreichen sein. Ausserdem würde ein solches Instrument den Selbstinductionscoefficienten des Schliessungsbogens erheblich vermehrt haben, was ich zu vermeiden wünschte.

Es blieb also die calorimetrische Methode. Das Riess'sche Luftthermometer erwies sich bei grossen Widerständen des Schliessungsbogens als zu unempfindlich; ich habe daher eine Art von Flüssigkeitswiderstand-Thermometer construirt, das die in der leitenden Flüssigkeit bei der Entladung entwickelte Wärme direct durch die Ausdehnung derselben zu messen gestattet. Dasselbe besteht in seiner endgültigen Form aus einer 0,6 cm weiten Glasröhre; dieselbe ist mit einer Lösung von Kadmiumjodid in Amylalkohol gefüllt, an den Enden geschlossen und mit seitlichen Ansatzröhren versehen, von denen eine capillare nach aussen offen ist, während in die anderen mit einem Kitt aus Kaolin und Wasser-glas einige Centimeter lange und 0,05 cm dicke amalgamirte Kadmiumdrähte als Electroden luftdicht eingekittet sind. Die Ausdehnung der Flüssigkeiten wird in der Capillare mittelst eines Mikroskopes mit Oculartheilung gemessen; wie hieraus die entwickelte Wärmemenge zu bestimmen ist, wird im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

4. Die Constanten der Apparate.

Die Widerstände, Electricitätsmengen, Potentiale wurden mittelst eines gut calibrirten Rheostaten von Hartmann und Braun und eines Torsionsgalvanometers von Siemens und Halske, das noch mit dem Silbervoltameter besonders geacht wurde, auf absolutes Maass zurückgeführt.

Der Reductionsfactor der Wiedemann'schen Bussole wurde durch Abzweigung nach einem bekannten Widerstandsverhältniss von einem durch das Torsionsgalvanometer gehenden Hauptstrome bestimmt; ihre Empfindlichkeit war meist so abgeglichen, dass bei etwa 7,5 Sec. Schwingungsdauer, 230 cm Scalenabstand und Dämpfungsverhältniss 5,5 einer Electricitätsmenge von einem Mikrocoulomb (10^{-6} Coulomb) ein Impulsivaußschlag von etwa 1 mm entsprach. Schwingungsdauer und Galvanometerconstante wurden häufig bestimmt und änderten sich nur langsam im Laufe der Zeit.

Zur Bestimmung der grossen Jodcadmiumwiderstände von 0,5—30 Megohm (10^6 Ohm) wurde die Wiedemann'sche Bussole mit zwei Rollen von je 9000 Windungen versehen, ihr Reductionsfactor, wie vorstehend angegeben, und die electromotorische Kraft einer constanten Säule (1 bis 3 Daniell) mit dem Torsionsgalvanometer bestimmt, und die von letzterer in den Widerständen erzeugte Stromintensität mit der Bussole gemessen. Die Abwesenheit einer merklichen Polarisation wurde durch besondere Versuche festgestellt. Die Widerstände unter einem Megohm zeigten wohl während einer Versuchsreihe erhebliche Aenderungen; der Electrodenabstand war bei ihnen sehr klein. Die Widerstände befanden sich der Isolirung halber in Luft; die Temperatur des Beobachtungsraumes blieb aber recht constant während der Versuche, sodass die Widerstandsangaben auf einige Procante genau sein dürften; das ist hier aber ausreichend, da auch die Messungen der Electricitätsmengen und der Joule'schen Wärme, der erwähnten Umstände halber, keine grössere Genauigkeit zuließen.

Die Capacität der Leydener Flaschen wurde in bekannter Weise durch langdauernde Ladung mittelst einer Chromsäurebatterie von 40 Elementen, deren electromoto-

rische Kraft gleichfalls am Torsionsgalvanometer gemessen war, und Entladung durch die Wiedemann'sche Bussole (mit den empfindlichen Rollen) bei kurzem Schluss bestimmt. Für die beiden Flaschen einzeln und für beide zusammen ergaben sich folgende Capacitäten in Mikrofarad:

0,00452; 0,00750; 0,01198.

Es wurden die abgerundeten Werthe:

4,5, 7,5 und $12,0 \cdot 10^{-3}$ Mikrofarad [$10^{-18} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2$] im Folgenden benutzt.

Der Selbstinductionscoefficient der mit Guttapercha isolirten Galvanometerrollen, gegen den derjenige der zugeschalteten Widerstände und Verbindungsdrähte zu vernachlässigen war, wurde nach der Methode von Dorn¹⁾ zu $8,0 \times 10^6 \text{ cm} = 0,008$ Quadrant bestimmt. Diese Rollen blieben, wie bemerkt, immer im Hauptschliessungsbogen eingeschaltet; wo sie zu Messungen dienten, waren sie von dem Kupferdämpfer des Galvanometers so weit entfernt, dass nach Hrn. Klemenčič's Erfahrungen²⁾ ihre Selbstinduction durch denselben nicht wesentlich beeinflusst wurde.

Für den vorstehenden Selbstinductionscoefficienten p und die obigen drei Capacitäten c ergeben sich folgende Werthe des Grenzwiderstandes $r = 2\sqrt{p/c}$, für welchen die oscillirende Entladung in die einfache übergeht:

$r = 2670, 2070, 1630 \text{ Ohm} [10^9 \text{ cm sec}^{-1}]$.

Zur Bestimmung der Joule'schen Wärme diente das im vorigen Abschnitt beschriebene Widerstandsthermometer. Ist w die bei der Entladung in dem Flüssigkeitswiderstand entwickelte Wärmemenge, v das Volumen, s das specifische Gewicht und σ die specifische Wärme der Flüssigkeit, so ist, falls kein Wärmeverlust stattfindet, die Temperaturerhöhung derselben:

$$\vartheta = \frac{w}{v \cdot s \cdot \sigma}.$$

Dabei erfährt die Flüssigkeit, wenn α ihr Ausdehnungscoefficient, die Volumvermehrung:

$$v \cdot \alpha \cdot \vartheta = \frac{w \cdot \alpha}{s \cdot \sigma};$$

1) F. Kohlrausch, Prakt. Physik 6. Aufl. p. 283.

2) Klemenčič, Exner's Rep. 22. p. 587. 1886.

dieselbe ist also unabhängig von dem Volumen v . Wird die Ausdehnung in einer Capillaren vom Querschnitt $\pi \rho^2$ durch Verschiebung des Flüssigkeitsfadens um die Länge λ gemessen, so ist:

$$\frac{w \cdot \alpha}{s \cdot \sigma} = \pi \cdot \rho^2 \cdot \lambda, \quad \text{woraus} \quad w = \pi \cdot \rho^2 \cdot \lambda \cdot \frac{s \cdot \sigma}{\alpha}$$

folgt; es ist also w der Verschiebung λ proportional.

Der Wärmeverlust während der übrigens kurzen Entladungsdauer (von höchstens 0,05 Sec.) ist nun freilich schwer zu bestimmen. Eine ungefähre Schätzung ergibt aber, dass man ihn bei den vorliegenden Versuchen unbedenklich vernachlässigen darf, da er 1 Proc. der gesammten entwickelten Wärmemenge bei weitem nicht erreichen dürfte. In der That lässt sich auch aus zahlreichen Messungen, die mit verschiedener Concentration der Jodkadmiumlösung (0,05 und 0,20 Grammmoleküle im Liter) und verschiedener Weite der Röhre angestellt wurden, kein die Versuchsfehler übersteigender Einfluss des Verhältnisses der Oberfläche der Flüssigkeit zum Volumen auf die gemessene Wärmemenge erkennen. Ebensowenig scheint die Weite der Capillare von Einfluss zu sein.

Bei den unten mitgetheilten Versuchen wurde eine Lösung von 0,05 Grammmolekul im Liter benutzt. Specifiches Gewicht und Ausdehnungscoefficient wurden mit dem Pyknometer bestimmt; es ergab sich:

$$s = 0,8295 \text{ bei } 16^\circ,$$

$$\alpha = 0,03909 \text{ zwischen } 13^\circ \text{ und } 19^\circ.$$

Die specifische Wärme ergab sich nach der von Hrn. Pfaundler angegebenen Methode unter Benutzung einer quecksilbergefüllten Glaskugel als Erhitzungskörper¹⁾:

$$\sigma = 0,520 \text{ zwischen } 12^\circ \text{ und } 25^\circ.$$

Der Querschnitt der Capillare wurde durch Wägen eines Quecksilberfadens und directe Messung des Durchmessers mit dem Mikroskop übereinstimmend:

$$\pi \rho^2 = 0,00928 \text{ qcm}$$

gefunden. Daraus berechnet sich:

$$w = 4,406 \cdot \lambda \text{ Grammcalorien,}$$

wenn λ in Centimetern ausgedrückt wird.

1) Vgl. F. Kohlrausch, Prakt. Physik 6. Aufl. p. 94.

Die Verschiebung des Flüssigkeitsfadens wurde mit einem Mikroskop mit Ocularmikrometer beobachtet; ein Theilstrich p der Oculartheilung ist gleich $1/400$ cm, mithin:

$$w = 0,001 \cdot 101 \cdot p \text{ Grammcalorien,}$$

oder $w = 0,004687 \cdot p$ Joule [Volt \times Amp. \times sec], wenn man nach Hrn. Dieterici's Bestimmung¹⁾:

$$1 \text{ Grammcal.} = 4,244 \times 10^7 \text{ g} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} = 4,244 \text{ Joule setzt.}$$

5. Die entladenen Electricitätsmengen.

Um zunächst einen allgemeinen Ueberblick über die Abhängigkeit der Entladung von Capacität und Leitungswiderstand zu gewinnen, habe ich eine grössere Anzahl von Messungen der entladenen Electricitätsmenge bei verschiedenen Widerständen, Capacitäten und Funkenstrecken vorgenommen, deren Ergebnisse in Tab. 1 zusammengestellt sind.

Tabelle 1.
Entladene Electricitätsmengen in Mikrocoulomb.
Temp. 14,5°. Barometerstand 738 mm.

Reihe	Capacität in 10^{-3} Mikrof.	Eingeschaltete Leitungswiderstände in Megohm							
		0,0086	0,75	1,34	3,10	6,10	12,20	18,30	24,40
0,1 cm Funkenstrecke									
1	7,5	36,5	31,7	28,3	17,0	14,4* (7,1)	3,1* (0,8)	2,2* (0,5)	1,2* (0,4)
2	12,0	61,4	45,2	35,8	26,2	12,7* (8,0)	1,9* (1,0)	—	—
0,2 cm Funkenstrecke									
3	4,5	35,9	31,1	26,2	20,8	13,7	3,5* (1,0)	1,5* (0,4)	—
4	7,5	62,9	52,7	44,1	34,2	24,6	6,8* (1,8)	3,6* (0,8)	1,8* (0,4)
5	12,0	99,2	87,2	72,3	54,4	36,1	19,9* (7,3)	6,5* (0,9)	—
0,3 cm Funkenstrecke									
6	4,5	49,0	43,5	39,7	27,4	28,0	11,1	7,3* (5,5)	4,9* (0,8)
7	7,5	77,2	70,2	64,9	46,1	36,4	15,7	5,5* (3,5)	3,6* (2,0)
8	12,0	128,2	112,6	103,9	76,5	58,1	23,6	3,2* (0,5)	3,4* (1,1)

Jede der für die entladene Electricitätsmenge angegebenen Zahlen ist das Mittel aus 10 Einzelwerthen; um einen Begriff von dem Gang der Beobachtungen zu geben, theile ich die Beobachtungen einer Reihe von mittlerer Genauigkeit (Nr. 2) ausführlich mit. Dieselbe ist als typisch zu betrachten auch für die in den späteren Abschnitten mittheilenden Messungen.

1) Dieterici, Wied. Ann. 33. p. 433. 1888.

Tabelle 1.

Reihe 2. 0,1 cm Funkenstrecke; Kapazität $12,0 \times 10^{-3}$ Mikrofarad.
Eingeschaltete Leitungswiderstände in Megohm.

	0,0086	0,75	1,34	3,10	6,10	12,20
	53,5	45,9	34,4	25,7	15,7	1,0
	61,9	47,4	42,2	28,8	8,8	2,4
	63,8	42,7	35,2	27,0	16,5	3,2
	64,0	46,0	31,9	20,9	8,0	1,9
	62,3	47,0	36,4	26,2	8,1	1,2
Mittel	61,10	45,80	36,02	25,72	11,42	1,94
	59,6	45,9	38,5	28,3	15,2	—
	63,1	42,0	31,5	26,1	14,7	—
	61,1	40,0	34,3	26,6	15,9	—
	57,2	45,2	35,8	25,5	15,2	—
	63,5	47,0	35,5	25,4	8,4	—
Mittel	60,90	44,02	35,12	26,38	13,88	—
Hauptmittel	61,00	44,91	35,57	26,05	12,65	1,94

Hier sind die Galvanometerausschläge angegeben; dieselben sind bei einer Galvanometerconstanten von $2,335 \times 10^{-7}$ Amp., einer Schwingungsdauer von 7,45 Sec. und einem Dämpfungsverhältniss von 5,86 mit 1,006 zu multipliciren, um Mikrocoulomb zu erhalten. Die Reihenfolge der Beobachtung der einzelnen Gruppen ist in der oberen Hälfte von links nach rechts, in der unteren umgekehrt. Die Mittel aus den entsprechenden Gruppen stimmen bei anderen Reihen weniger gut überein, als bei dieser; auch die Einzelbeobachtungen zeigen manchmal noch stärkere Abweichungen voneinander.

Die Reihen der Tab. 1 sind an drei aufeinander folgenden Tagen unter sehr constant bleibenden Verhältnissen erhalten worden; zu anderen Zeiten konnten die gemessenen Werthe erheblich (10 Proc. und mehr) abweichen, ohne dass sich die Ursache hätte angeben lassen.

Die Beobachtungen bestätigen zunächst die bekannte Thatsache, dass die entladenen Electricitätsmengen mit wachsendem Widerstande des Schliessungsbogens abnehmen. Zu bemerken ist, dass bis etwa 4 Megohm die Entladungen einfach sind, dann beginnen sie intermittirend zu werden, wie Aussehen und Geräusch der Funken, namentlich aber auch photographische Aufnahmen deutlich erkennen lassen. Mit wachsendem Widerstand nimmt die Intermittenz immer mehr zu und bei einem gewissen, mit grösseren Funkenstrecken

zunehmenden Widerstand, werden die Beobachtungen ganz unregelmässig, sodass der Mittelwerth eigentlich keine Bedeutung mehr hat. Neben sehr grossen Ausschlägen des Galvanometers, die mit einem starken Zischen des Funks verbunden sind, kommen ganz kleine, bei grössten Widerständen nahezu verschwindend kleine vor, die einem einfachen Funken zu entsprechen scheinen. In der Tab. 1 sind die Mittelwerthe aus diesen Beobachtungen mit einem Stern bezeichnet und es ist denselben der kleinste beobachtete Werth in Klammern hinzugefügt.

Nach Feddersen's¹⁾ Beobachtungen besteht das Bild der Entladungsfunkens im rotirenden Spiegel bei sehr grossen Widerständen nur noch aus einer grossen Anzahl leuchtender Linien, während der schwachleuchtende Schimmer der eigentlichen Gasentladung fast ganz verschwindet. Darf man jene Linien den Metallfunkens zuschreiben, wie es wahrscheinlich ist, so geht aus den mitgetheilten Zahlen hervor, dass die in jedem einzelnen dieser Metallfunkens übergeföhrte Electricitätsmenge auch bei Condensatorfunkens sehr klein ist, in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen Perrot's²⁾ beim Inductionsfunken.

Es lässt sich weiter aus den obigen Beobachtungen schliessen, dass die eigentliche Gasentladung mit wachsendem Widerstand bis zum Verschwinden abnimmt und zwar um so schneller, je kleiner die Funkenstrecke ist.

Endlich ergibt sich auch, dass bei derselben Funkenstrecke die entladenen Electricitätsmengen bei allen Widerständen, mit Ausnahme der grössten, den Capacitäten proportional sind. Die in Tab. 2 mitgetheilten Quotienten der Electricitätsmengen durch die zugehörige Capacität zeigen dies deutlich; die Abweichungen liegen durchweg innerhalb der Fehlergrenzen. Man darf diese Beziehung daher als für die einfachen Funkenentladungen streng gültig annehmen.

1) Feddersen, Beiträge zur Kenntniß des electrischen Funks.
Kiel 1857.

2) Perrot, Ann. de chim. et de phys. (3) 61. p. 200. 1861.

Tabelle 2.
Entladene Electricitätsmengen in Volt.
Capacitäten

Reihe	Capacität in 10^{-8} Mikrof.	Leitungswiderstände in Megohm					
		0,0086	0,75	1,34	3,10	6,10	12,20
0,1 cm Funkenstrecke							
1	7,5	4870	4230	3770	2270	—	—
2	12,0	5120	3770	2980	2180	—	—
0,2 cm Funkenstrecke							
3	4,5	7980	6910	5820	4510	3040	—
4	7,5	8390	7030	5880	4560	3280	—
5	12,0	8270	7270	6020	4530	3010	—
0,3 cm Funkenstrecke							
6	4,5	10890	9670	8820	6090	5110	2470
7	7,5	10500	9360	8650	6150	4850	2090
8	12,0	10680	9380	8660	6370	4840	1970

6. Die Entladungspotentiale.

Zur Bestimmung der Entladungspotentiale mit Hülfe der bekannten Capacitäten der Leydener Flaschen benutzte ich die Thatsache, dass bei sehr grossen Widerständen im Funken nur eine sehr kleine Electricitätsmenge entladen wird. Die Flaschen wurden unter langsamem Drehen der Influenzmaschine geladen, bis die Funkenentladung durch einen grossen, eingeschalteten Widerstand (etwa 30 Megohm) erfolgte und durch eine kleine weitere Drehung, deren Grösse sich nach einigen Vorversuchen leicht bestimmen liess, die entladene Electricitätsmenge wieder ersetzt, das Potential also wieder bis nahe auf das Entladungspotential gebracht; eben bevor nun die neue Entladung durch den Funken erfolgen musste, wurden die Flaschen mittels des in Abschnitt 3 beschriebenen Ausladers durch das Galvanometer unter Ausschluss des Rückstandes vollständig entladen. Aus der Capacität und der entladenen Electricitätsmenge war das Entladungspotential zu berechnen. Diese Messungen wurden im Zusammenhang mit den im nächsten Abschnitte zu erwähnenden ausgeführt; dass sie brauchbare Ergebnisse lieferten, mag die folgende Zusammenstellung zeigen (Tab. 3), die ausser den verschiedenen von mir erhaltenen Werthen die entsprechenden für Messingkugeln von

1 cm Durchmesser von den Herren Paschen¹⁾, Baille²⁾ und Freyberg³⁾ gemessenen Potentiale enthält. Die beiden ersten haben sich electrostatischer Methoden bedient (eine electrostatische Potentialeinheit ist gleich 300 Volt angenommen), der letztere dagegen gleichfalls einer galvanometrischen.

Tabelle 3.
Entladungspotentiale in Volt.

Capacität in 10^{-3} Mikrof.	F u n k e n s t r e c k e		
	0,1 cm	0,2 cm	0,3 cm
4,5	—	—	11820
7,5	—	—	11470 11770
12,0	4770	8570	11400
	4850	8440	11680 (Paschen)
	4570	8030	11200 (Baille)
	4660	9500	11700 (Freyberg)

Auch die Einzelbeobachtungen stimmen sehr gut mit einander überein; z. B. ergaben sich in einer Beobachtungsgruppe die Ausschläge:

104,2, 105,2, 108,0, 108,5, 105,2; Mittel: 104,22.

7. Die zurückbleibenden Ladungen.

Zur Berechnung der von den electricischen Kräften bei der Entladung geleisteten Gesammtarbeit ist außer der Capacität und dem Entladungspotential oder der Anfangsladung noch die Kenntniss der zurückbleibenden Ladungen erforderlich. Ueber die Bestimmung derselben unabhängig von dem wiederauftretenden Rückstand ist in Abschnitt 3 das Nöthige bemerkt worden.

Tabellen 4—6 enthalten die Zusammenstellung der mit der grössten Capacität (12×10^{-3} Mikrofarad) und drei Funkenstrecken gewonnenen Zahlen. Die erste Spalte enthält die Leitungswiderstände des Schliessungsbogens r , die zweite die zurückbleibenden Ladungen q_1 , die dritte deren Quadrate q_1^2 . Aus den Zahlen der vierten Spalte, welche die Quo-

1) Paschen, Wied. Ann. 37. p. 81. 1889.

2) Baille, Ann. de chim. et de phys. (5) 25. p. 486. 1882.

3) Freyberg, Wied. Ann. 38. p. 250. 1889.

tienten q_1^2/r darstellen, ergibt sich, wenn auch nur mit sehr mässiger Annäherung, dass diese Quotienten von dem Widerstande r nahe unabhängig sind.

Tabellen 4—6.

Zurückbleibende Ladung in Mikrocoulomb.

0,3 cm Funkenstrecke. Temp. 17,0°. Bstd. 760 mm.

Capacität $12,0 \times 10^{-8}$ Microfarad.

$q_0 = 136,7$ Mikrocoulomb.

Widerst. in Megohm	q_1	q_1^2	$\frac{q_1^2}{r}$ Mikrocoul. Ohm	$\frac{q_1^2}{4c^2r}$
0,60	30,6	936	1560×10^{-6}	2,71
1,80	47,9	2294	1760 "	3,06
4,00	78,9	6225	1560 "	2,71
5,50	82,6	6823	1240 "	2,15
6,80	92,3	8519	1250 "	2,17
9,20	107,6	11580	1260 "	2,19
12,90	117,0	13690	(1060 ")	(1,84)
Mittel				1440×10^{-6}
Mittel				2,50

0,2 cm Funkenstrecke. Temp. 17,0°. Bstd. 751 mm.

$12,0 \times 10^{-8}$ Mikrofarad; $q_0 = 102,9$ Mikrocoulomb.

0,90	30,5	930	1030×10^{-6}	1,79
3,20	53,8	2894	900 "	1,56
3,90	55,6	3091	790 "	1,37
5,40	64,8	4199	780 "	1,35
7,40	74,0	5476	740 "	1,28
10,10	87,4	7639	750 "	1,30
11,90	92,1	8482	(710 ")	(1,23)
Mittel				830×10^{-6}
Mittel				1,44

0,1 cm Funkenstrecke. Temp. 17,2°. Bstd. 749 mm.

$12,0 \times 10^{-8}$ Mikrofarad; $q_0 = 51,2$ Mikrocoulomb.

0,90	22,1	488	540×10^{-6}	0,94
3,20	42,2	1780	560 "	0,97
3,90	45,2	2048	520 "	0,90
5,40	54,6	2981	550 "	0,95
7,40	57,2	3272	(440 ")	(0,76)
Mittel				540×10^{-6}
Mittel				0,94

Die Ursache der Abweichungen von dieser Gesetzmässigkeit kann nur theilweise in Beobachtungsfehlern liegen, da sich in allen Reihen ein bestimmter Gang, nämlich eine Abnahme von q_1^2/r mit wachsendem r zeigt; sie ist indessen unschwer anzugeben und zweifellos in dem Auftreten der intermittirenden Entladungen zu suchen.

Nimmt man nämlich an, dass die erwähnte Gesetz-

mässigkeit, wie es wahrscheinlich ist, nur für die einfache Entladung streng gültig sei, so muss durch die nachfolgenden Theilentladungen, welche die nach der ersten zurückgebliebene Ladung verringern, eine noch stärkere und mit r wachsende Verminderung von q_1^2/r bewirkt werden. Wirklich zeigt sich die bei weitem grösste Abweichung bei dem grössten Widerstande, bei dem nach Tab. 1 die Entladungen schon ganz unregelmässig sind und die erste einfache Entladung wahrscheinlich schon verschwindend klein ist. Die entsprechenden Werthe von q_1^2/r sind daher auch eingeklammert und bei der Mittelnahme ausgeschlossen worden.

Erwähnt sei übrigens, dass auch Isolirungsfehler das Ergebniss in eben diesem Sinne beeinflussen würden.

Dass hier aber die erstere Ursache die hauptsächlich maassgebende ist, lässt sich dadurch beweisen, dass die Abweichungen wesentlich grösser ausfallen, wenn man das Entstehen intermittirender Entladungen befördert; dies geschieht aber dadurch, dass man die Funkenstrecke mit einer kleineren geschlossenen Hülle umgibt. In der Hoffnung, die Versuche regelmässiger zu erhalten durch Entfernen des Staubes, schloss ich die Funkenstrecke in einen etwa 5 cm langen und ebenso weiten Glascylinder ein, in den durch einen längeren Wattepropfen filtrirte Luft eingeführt wurde. Das Ergebniss war dem erwarteten entgegengesetzt; die Unregelmässigkeiten waren wesentlich grösser, als bei dem Funkenübergang in freier Luft, und es war leicht zu erkennen, dass

Tabelle 7.

Zurückbleibende Ladung in Mikrocoulomb.

0,3 cm Funkenstrecke. Temp. 16,9°. Bstd. 753.
 $7,5 \times 10^{-8}$ Mikrofarad; $q_0 = 86,0$ Mikrocoulomb.

Widerstand in Megohm	q_1	q_1^2	$\frac{q_1^2}{r}$
0,62	18,7	350	560×10^{-8}
1,33	27,7	767	580 "
4,10	49,0	2401	580 "
5,60	50,6	2560	460 "
6,90	51,8	2683	390 "
9,40	55,8	3114	330 "
13,10	61,2	3745	290 "
19,60	69,2	4789	240 "

die Intermittenz der Entladungen bedeutend stärker geworden war. Tab. 7 enthält die Ergebnisse einer mit eingeschlossener Funkenstrecke ausgeführten Messungsreihe.

Der wesentlich stärkere Abfall von q_1^2/r mit wachsendem r vom Beginne der intermittirenden Entladung an, ist daraus unmittelbar ersichtlich.

Nach Abschnitt 5 ist die entladene Electricitätsmenge der Capacität proportional; dasselbe muss von der zurückbleibenden gelten, da das Entladungspotential von der Capacität unabhängig ist. Man darf mithin behaupten, dass für die einfache Entladung die Grösse:

$$h = \frac{q_1^2}{4rc^3},$$

eine von der Capacität c und dem Widerstände des Schliessungsbogens r unabhängige Grösse ist. In der letzten Spalte der Tabellen 4—6 ist dieselbe in Volt \times Amp. angegeben; wir werden später auf sie zurückkommen und ihre Bedeutung kennen lernen.

8. Die Joule'sche Stromwärme im Schliessungsbogen.

Die Methode, nach welcher die Joule'sche Stromwärme im leitenden Theile des Schliessungsbogens gemessen wurde, ist in Abschnitt 4 beschrieben. Bei diesen Messungen traten dieselben Unregelmässigkeiten, wie bei den übrigen, noch verstärkt auf; namentlich konnten die zu verschiedenen Zeiten gewonnenen Resultate erheblich voneinander abweichen.

Es wäre daher, um streng vergleichbare Resultate zu haben, erwünscht gewesen, die Messungen der entladenen und zurückbleibenden Electricitätsmengen und der entwickelten Wärmemengen gleichzeitig anzustellen. Das hätte das Zusammenwirken mehrerer Beobachter erfordert, die mir nicht zur Verfügung standen.

Aus der grossen Zahl von Beobachtungen, die im wesentlichen alle denselben Gang zeigen und die gewonnenen Ergebnisse bestätigen, theile ich hier nur einige Reihen mit, die in unmittelbarem Zusammenhange (gleich vorher und nachher) mit den in den Tabellen 4 und 5 mitgetheilten Reihen erhalten wurden und mit diesen daher vergleichbar sind.

Tabelle 8-9.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stromwärme } w = \int_0^{t_1} r i^2 dt \\ \text{Gesamtarbeit der Entladung } a = \frac{q_0^2 - q_1^2}{2c} \\ \text{Arbeit im Funken } f = a - w \end{array} \right\} \text{in Joule.}$$

0,3 cm Funkenstrecke 12×10^{-3} Mikrofarad.

Widerstand r in Megohm	w	a	f
0,60	0,714	0,740	0,026
1,30	0,626	0,683	0,057
4,00	0,454	0,519	0,065
5,50	0,416	0,494	0,078
6,80	0,357	0,424	0,067
9,20	0,234	0,296	0,062
12,90	0,156	0,208	0,052
0,2 cm Funkenstrecke 12×10^{-3} Mikrofarad.			
0,90	0,369	0,402	0,033
3,20	0,259	0,320	0,061
3,90	0,244	0,312	0,068
5,40	0,193	0,266	0,073
7,40	0,163	0,213	0,050
10,10	0,080	0,123	0,043
11,90	0,044	0,087	0,043

Die Tabellen 8 und 9 enthalten in Spalte 1 die Widerstände r , in Spalte 2 die entwickelten Wärmemengen $w = \int_0^{t_1} r i^2 dt$, wenn i die Intensität des Entladungsstromes zur Zeit t , t_1 aber die Entladungsdauer, für die Capacität 12×10^{-3} Mikrofarad. Ueber die Spalten 3 und 4 vergleiche den folgenden Abschnitt.

9. Die Entladungsarbeit im Funken.

Die im Abschnitt 6 und 7 mitgetheilten Zahlen erlauben die bei der Entladung von den electricischen Kräften geleistete Gesamtarbeit zu berechnen. Dieselbe ist, wenn q_0 die anfängliche, q_1 die zurückbleibende Ladung bezeichnen:

$$a = \frac{q_0^2 - q_1^2}{2c}.$$

q_0 ergibt sich aber aus dem Entladungspotential (Tab. 3) und der Capacität in bekannter Weise.

Macht man die wohl erlaubte Annahme, dass diese Arbeit ganz im Schliessungsbogen wieder erscheint, dass also

die bei der Entladung — abgesehen von der Rückstandsbildung — im Dielectricum des Condensators geleistete Arbeit verschwindend klein sei, so gibt die Differenz $a - w$ die im Funken geleistete Arbeit an.

Die Spalten 3 und 4 der Tabellen 8 und 9 enthalten die mit Hülfe der Tabellen 3, 4 und 5 berechneten Werthe von a und $f = a - w$, d. h. der Gesamtarbeit und der Funkenarbeit der Entladung.

Dieselben bestätigen das schon vor längerer Zeit von Hrn. Paalzow¹⁾ gefundene Ergebniss, dass die Funkenarbeit bei nicht oscillirender Entladung mit wachsendem Widerstände des Schliessungsbogens bis zu einem Maximum zu, dann wieder abnimmt.

Es sei bemerkt, dass photographische Aufnahmen der Funken ein ebenso deutlich ausgesprochenes und nahe an derselben Stelle liegendes Maximum der chemischen Lichtwirkung nachweisen, das um so schärfer hervortritt, je mehr die Intermittenz der Entladungen ausgeschlossen wird.

Es schien mir erwünscht, dieses Ergebniss noch einmal in der von Hrn. Paalzow angegebenen Weise zu prüfen. Hr. Paalzow hat drei Methoden angewandt: Thermoelemente, Einführung eines Quecksilberthermometers in die Funkenstrecke, Einschliessung der Funkenstrecke in ein Luftthermometer. Die letzte Methode ist die einzige, mit der er das Maximum wirklich constatirt hat. Dieselbe ist nicht einwurfsfrei; zwar die mechanische Wirkung der Entladung, die man zugleich mit der Wärmewirkung misst, ist, wie auch Hr. Paalzow bemerkt, bei so grossen Widerständen, wie sie hier in Betracht kommen, sehr gering; aber die Reibung des abschliessenden Flüssigkeitsfadens muss bei den verhältnissmässig kleinen und kurzauernden Druckkräften die Messung erheblich beeinflussen. An eine absolute Messung auf diesem Wege ist daher nicht zu denken, und man kann nur eine allgemeine Uebereinstimmung im Gange mit den obigen Bestimmungen erwarten. Dazu kommt aber noch, dass, wie bemerkt, durch das Einschliessen der Funkenstrecke die Entladungen erheblich beeinflusst und geändert werden,

1) Paalzow, Pogg. Ann. 127. p. 126. 1866.

was sich auch darin äussert, dass das Maximum der Funkenarbeit zu grösseren Widerständen verschoben wird; die Messungen mit dem Luftthermometer können daher auch nur mit den Messungen bei eingeschlossener Funkenstrecke verglichen werden.

Tabelle 10.

Stromwärme w
Gesamtarbeit a
Funkenarbeit f } in Joule.

0,3 cm Funkenstrecke; $7,5 \times 10^{-3}$ Mikrofarad.

Widerstand r in Megohm	w	a	f	Mit dem Luft- thermometer
0,62	0,460	0,470	0,010	4,4
1,33	0,409	0,442	0,033	5,3
4,10	0,311	0,383	0,022	7,0
5,60	0,278	0,322	0,044	7,5
6,90	0,267	0,314	0,047	8,1
9,40	0,220	0,285	0,065	9,0
13,10	0,195	0,243	0,048	6,0
19,80	0,138	0,174	0,036	3,6

Ich habe daher zu den Beobachtungen der Tab. 7 auch noch die entsprechenden Messungen von w ausgeführt, und mit den Werthen von a und f in Tab. 10 zusammengestellt. Die letzte Spalte dieser Tabelle gibt in einem willkürlichen Maass die Angaben des Luftthermometers aus einer grösseren Anzahl von Messungen mit etwas verschiedenen Widerständen interpolirt. Die Zahlen der beiden letzten Spalten zeigen in der That einen im ganzen übereinstimmenden Gang; namentlich liegt das Maximum in beiden an der gleichen Stelle.

Zu erwähnen ist noch, dass die Genauigkeit, mit welcher f aus den Messungen hervorgeht, ziemlich gering ist, da es sich als kleiner Unterschied zweier mit erheblichen Beobachtungsfehlern behafteter Grössen ergibt.

10. Die Dauer der Entladung.

Aus Feddersen's Beobachtungen¹⁾ lässt sich entnehmen, dass auch die Dauer der einfachen Entladung mit wachsendem Widerstande zunächst wächst, und zwar wahr-

1) Feddersen, Beiträge etc., Kiel 1857. p. 27; Pogg. Ann. 113. Taf. VII. Fig. 18—19. 1861.

scheinlich auch bis zu einem Maximum, da bei Eintritt der intermittirenden Entladung die Dauer der ersten Theilentladung wieder viel kleiner wird. Die Entladungsdauer würde danach also dasselbe Verhalten zeigen, wie die Funkenarbeit.

Die in den vorhergehenden Abschnitten mitgetheilten Daten gestatten nun für die Entladungsdauer wenigstens Näherungswerte zu berechnen, die dieses Ergebniss bestätigen.

Man erhält nämlich aus den Integralen:

$$\int_0^{t_1} i^2 dt = \frac{w}{r} \quad \text{und} \quad \int_0^{t_1} i dt = q_0 - q_1$$

die zur Abkürzung mit B und A bezeichnet werden mögen, einen ersten Näherungswert für die Entladungsdauer:

$$\tau_1 = \frac{A^2}{B} = \frac{r(q_0 - q_1)^2}{w}.$$

Derselbe wäre nur dann richtig, wenn die Stromintensität i während der ganzen Entladung constant bliebe. In Wirklichkeit wird i bei den hier benutzten grossen Leitungs-widerständen eine in verschwindend kurzer Zeit bis zu einem Maximum ansteigende und dann allmählich abfallende Function der Zeit sein. Der obige Werth τ_1 ist daher kleiner, als die Entladungsdauer, und zwar um so mehr, je grösser der Abfall der Intensität, je kleiner unter sonst gleichen Umständen der Widerstand r ist.

Zu einem zweiten Näherungswerte gelangt man durch die Annahme, dass der Abfall der Intensität von dem Maximalwerth geradlinig sei, d. h. dass i sich als eine lineare Function der Zeit darstellen lasse, etwa:

$$i = i_m - \alpha t,$$

wobei i_m den Maximalwerth von i bezeichnet. Diese Annahme wird im allgemeinen wieder um so näher zutreffen, je grösser r ist.

Für diesen Fall ist:

$$A = \int_0^{t_1} i dt = i_m t_1 - \frac{1}{2} \alpha t_1^2,$$

$$B = \int_0^{t_1} i^2 dt = i_m^2 t_1 - i_m \alpha t_1^2 + \frac{1}{3} \alpha^2 t_1^3.$$

$$A^2 = i_m^2 t_1^2 - i_m \alpha t_1^3 + \frac{1}{4} \alpha^2 t_1^4 = B t_1 - \frac{1}{12} \alpha^2 t_1^4,$$

also: $t_1 = \frac{A^2}{B} - \frac{1}{12} \frac{\alpha^2 t_1^4}{B},$

oder da $\frac{1}{4} \alpha^2 t_1^4 = (i_m t_1 - A)^2:$

$$t_1 = \frac{1}{B} \{ A^2 - \frac{1}{4} (i_m t_1 - A)^2 \},$$

woraus sich für t_1 die quadratische Gleichung ergibt:

$$t_1^2 - \left(\frac{3B}{i_m^2} + \frac{2A}{i_m} \right) t_1 = -4 \frac{A^2}{i_m^2}$$

und endlich:

$$t_1 = \frac{3B}{i_m^2} + \frac{A}{i_m} - \sqrt{\left(\frac{3B}{i_m^2} + \frac{A}{i_m} \right)^2 - \left(\frac{2A}{i_m} \right)^2}.$$

Was i_m betrifft, so ist bei der Entladung ohne Funkenstrecke für hinreichend grosse Widerstände:

$$i_m = \frac{q_0}{rc}$$

bis auf ein zu vernachlässigendes Correctionsglied. Wir werden sehen, dass die Einschaltung der Funkenstrecke die Maximalintensität um einen mit r wachsenden Bruchtheil verkleinert, und werden weiter unten die Gleichung zur Berechnung von i_m ableiten.

Für hinreichend grosse Widerstände führen die beiden Gleichung für τ_1 und t_1 zu identischen Werthen dieser beiden Grössen.

Die Tabellen 11 und 12 geben eine Zusammenstellung der den Beobachtungen in den Tabellen 4 und 8, resp. 5 und 9 entsprechenden Werthe von τ_1 und t_1 , aus der hervorgeht, dass für die grössten Widerstände die Werthe τ_1 schon völlig genau sind, und welche die Beobachtungen Feddersen's bestätigen. Die Entladungsdauer erreicht mit wachsendem Widerstand gleichfalls ein Maximum, das für gleiche Werthe von r einzutreten scheint, wie das Maximum von f .

Die Gleichung für t_1 gibt nur dann reelle Werthe, wenn $3B/i_m^2 > A/i_m$ ist. Das trifft für die kleinsten Werthe von r nicht zu, und es folgt daraus, dass hier die Annahme eines geradlinigen Abfallen der Intensität nicht erlaubt ist. In-dessen ist der Unterschied der beiden Grössen $3B/i_m^2$ und A/i_m in diesen Fällen klein, sodass man, wie es hier geschehen, das zweite Glied in dem Ausdruck für t_1 gegen das

erste bei mässiger Genauigkeit vernachlässigen kann; die beiden ersten Werthe von t_1 in jeder Reihe sind jedenfalls am wenigsten zuverlässig; um genauere zu finden, müsste die Stromintensität als Function der Zeit bekannt sein.

Tabellen 11—12.

Widerstand in Megohm	Entladungsdauer in sec,		$\frac{f}{t_1}$
	Funkenarbeit in der Zeiteinheit in Joule sec	0,3 cm Funkenstrecke; 12×10^{-3} Mikrofarad.	
0,3 cm Funkenstrecke; 12×10^{-3} Mikrofarad.			
0,60	0,0095	0,0107	2,4
1,30	0,0164	0,0206	2,7
4,00	0,0294	0,0310	2,1
5,50	0,0388	0,0402	1,9
6,80	0,0376	0,0382	1,8
9,20	0,0333	0,0333	1,9
12,90	0,0321	0,0321	1,7
0,2 cm Funkenstrecke; 12×10^{-3} Mikrofarad.			
0,90	0,0128	0,0148	2,2
3,20	0,0298	0,0392	1,5
3,90	0,0358	0,0468	1,5
5,40	0,0406	0,0492	1,5
7,40	0,0379	0,0391	1,3
10,10	0,0303	0,0303	1,4
11,90	0,0315	0,0315	1,4

Ich habe diese annähernde Berechnung der Entladungsdauer einer directen Bestimmung etwa mittelst rotirenden Spiegels, wie sie von Feddersen gemacht worden, vorgezogen, einerseits wegen der erheblichen Unsicherheit, mit der diese Bestimmung der Entladungsdauer nach der Leuchtdauer behaftet ist, sodann hauptsächlich weil sie für den vorliegenden Zweck nur dann von grösserem Werth gewesen wäre, wenn sie mit den übrigen Messungen von q_1 und w gleichzeitig hätte vorgenommen werden können, was mir nicht möglich war.

Die dritte Spalte der Tabellen 11 und 12 enthält den Quotienten f/t_1 , d.h. die Funkenarbeit pro Zeiteinheit. Auch diese erweist sich als nur in geringer Abhängigkeit von r stehend. Erwägt man die Unsicherheit, welche der Bestimmung sowohl von f , wie von t_1 anhaftet, und ferner den störenden Einfluss, den auch hier die intermittirenden Ent-

ladungen haben müssen, so darf man die Unabhängigkeit des Quotienten f/t_1 von dem Widerstand für die einfache Entladung wohl als sehr wahrscheinlich erachten.

11. Zur Theorie der Condensatorentladungen.

Bezeichnen q die Ladung der einen Belegung eines Condensators von der Capacität c zur Zeit t , so ist die Differentialgleichung für die Electricitätsbewegung in einem ununterbrochenen leitenden Schliessungsbogen vom Widerstand r und mit dem Selbstinductionscoefficienten p bekanntlich:

$$(1) \quad \frac{q}{c} \frac{dq}{dt} + r \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 dt + p \frac{dq}{dt} \frac{d^2 q}{dt^2} dt = 0.$$

Hierin stellt das erste Glied die Arbeit der electricischen Kräfte, das zweite die Joule'sche Stromwärme, das dritte die der Selbstinduction entsprechende Arbeit — sämmtlich im Zeitelement dt — dar. Die Gleichung ist vollständig, falls keine andere Arbeit geleistet wird, z. B. Wärme (Siemens) oder Tonerregung (W. Thomson) im Dielectricum, oder wenn diese zu vernachlässigen ist.

Für den bei unseren Versuchen zutreffenden Fall, dass der Widerstand $r > 2\sqrt{p/c}$, d. h. grösser als der sogenannte Grenzwiderstand ist, lautet die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung, die den Bedingungen

$$q = q_0 \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{für } t = 0 \text{ genügt:}$$

$$q = \frac{q_0}{2ap} e^{-\frac{rt}{2p}} \left\{ \left(ap + \frac{r}{2} \right) e^{at} + \left(ap - \frac{r}{2} \right) e^{-at} \right\},$$

$$\text{wenn:} \quad a = \frac{r}{2p} \sqrt{1 - \frac{4p}{r^2c}}$$

gesetzt wird.

Nimmt man die Richtung des positiven Entladungsstroms als positiv, so ist die Stromintensität zur Zeit t :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{2apc} e^{-\frac{rt}{2p}} \left\{ e^{at} - e^{-at} \right\},$$

$$\text{oder:} \quad i = \frac{r}{r\sqrt{1 - \frac{4p}{r^2c}}} e^{-\frac{rt}{2p}} \left\{ e^{at} - e^{-at} \right\},$$

wenn $v = q_0/c$ das Entladungspotential bezeichnet. Die Intensität erreicht ihren Maximalwerth nach der Zeit:

$$t_m = \frac{p}{r \sqrt{1 - \frac{4p}{r^2 c}}} \log \operatorname{nat} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4p}{r^2 c}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4p}{r^2 c}}}.$$

Für hinreichend kleine Werthe von:

$$\delta = \frac{p}{r^2 c},$$

d. h. für hinreichend grosse Werthe von r und $t \leq t_m$ kann man setzen:

$$i = \frac{v}{r} e^{-\frac{t}{rc}} (1 + 2\delta), \quad t_m = \frac{p}{r} (1 + 2\delta) \log \operatorname{nat} \frac{1}{\delta},$$

und der Maximalwerth von i wird:

$$i_m = \frac{v}{r} (1 + 2\delta) (\delta^2 - \delta).$$

Um zu zeigen, wie weit δ bei unseren Versuchen zu berücksichtigen ist, erwähne ich, dass für:

$c = 4,5 \times 10^{-18}$ Mikrofarad, $p = 0,008$ Quadrant,
und: $r = 0,1$ Megohm, $t_m = 0,7 \times 10^{-6}$ sec.,

also gegen die mehrere Tausendstel Secunden betragende Entladungsdauer zu vernachlässigen, und dass:

$$i_m = 0,9987 \frac{v}{r}, \quad \text{also sehr nahe } \frac{v}{r} \text{ ist.}$$

Ist der Schliessungsbogen durch eine Funkenstrecke unterbrochen, so ist noch die in dieser geleistete Arbeit in die Gleichung (1) einzuführen. Es sei dieselbe gleich kdt im Zeitelement dt , so erhält man für den unterbrochenen Schliessungsbogen die Differentialgleichung:

$$(2) \quad \frac{q}{c} \frac{dq}{dt} dt + r \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 dt + p \frac{dq}{dt} \frac{d^2 q}{dt^2} + kdt = 0.$$

Ueber k kann man verschiedene Annahmen machen. Betrachtet man, wie es bisher meist geschehen, die Funkenstrecke einfach als Widerstand, so ist k dem $(dq/dt)^2$ proportional zu setzen, und die Lösung von (2) unterscheidet sich von der von (1) nur durch einen anderen Werth des r .

Um die aus dieser Lösung sich nicht ergebende unvollständige Entladung durch Funkenstrecken zu erklären, hat

man die Zusatzhypothese gemacht, dass das Leitungsvermögen in der Funkenstrecke nur während der Entladung bestehe, und dass diese dann abbreche, wenn das Potential der Flasche bis auf dasjenige Entladungspotential herabgesunken ist, welches der durch die Entladung verdünnten Luftstrecke entspricht. Aber diese Hypothese ist nicht im Einklang mit der schon von Hrn. Paalzow festgestellten Thatsache, dass die Erwärmung in der Funkenstrecke mit wachsendem Widerstande bis zu einem Maximum zunimmt, während doch gleichzeitig die zurückbleibende Ladung immer grösser wird.

Ebensowenig ist eine andere von Edlund herrührende Hypothese, dass die Funkenstrecke wie eine electromotorische Gegenkraft wirke, im Stande, die Zunahme der zurückbleibenden Ladung mit wachsendem Widerstand genügend zu erklären. Nach dieser Hypothese wäre k proportional dq/dt zu setzen, und die hieraus folgende Lösung der Differentialgleichung (2) würde eine vom Leitungswiderstande unabhängige zurückbleibende Ladung ergeben.

Die schon aus Feddersen's und Paalzow's Arbeiten folgende Thatsache, dass Funkenarbeit und Entladungsdauer gleichmässig mit wachsendem Widerstand bis zu einem Maximum zunehmen, legt die andere Annahme nahe, dass die Funkenarbeit nur der Entladungsdauer proportional, oder dass k eine von der Zeit und der Stromintensität unabhängige Constante sei.

Diese Annahme scheint nicht recht vereinbar mit der Erfahrung, dass die Funkenstrecke während der Entladung und durch dieselbe verändert wird, und sie wird auch nicht streng richtig sein. Indessen darf man wohl annehmen, dass jene Veränderung zu Anfang sehr schnell erfolge und dann nur noch langsam fortschreite, so dass bei grossen Leitungswiderständen nach verhältnissmässig kurzer Zeit ein nahezu stationärer Zustand eintrete; unter dieser Voraussetzung wird man auch die obige Hypothese als näherungsweise zutreffend annehmen dürfen. Leider scheitert eine ausgiebige Prüfung derselben zur Zeit an der Nichtintegrität der Gleichung (2) für diesen Fall. Indessen lassen sich aus ihr doch einige Folgerungen ziehen, die mit der Erfahrung vergleichbar sind.

Zunächst ist aus den Mittheilungen des vorigen Ab-

schnitts ersichtlich, dass die Funkenarbeit in der Zeiteinheit für dieselbe Funkenstrecke nahe unabhängig vom Leitungs- widerstand, resp. der Entladungsdauer ist, wie es unsere Hypothese verlangt, und dass sich die Abweichungen aus den Versuchsbedingungen genügend erklären lassen.

Ferner folgt aus Gleichung (2), dass für $dq/dt = 0$, d. h. zu Beginn und zu Ende der Entladung, da k von 0 verschieden ist, d^2q/dt^2 oder di/dt unendlich sein muss, oder mit anderen Worten, die Entladung setzt mit einer plötzlich wachsenden Intensität ein und bricht ebenso plötzlich ab, ungleich dem allmählichen, unendlich lange dauernden Verlauf der Entladung ohne Funkenstrecke; hiermit stimmt die beobachtete starke Verkürzung der Entladungsdauer durch Einschalten der Funkenstrecke, die ich auch für die Funkenentladungen des Inductoriums in einer früheren Arbeit¹⁾ nachgewiesen habe, überein.

Auch bei der oscillirenden Entladung muss die Funkenstrecke nach unserer Hypothese dieses plötzliche scharfe Abbrechen der Intensität bei jeder einzelnen Schwingung bewirken, an Stelle des allmählichen einer Sinuscurve folgenden Verlaufs; und in der That sprechen hierfür manche der photographischen Aufnahmen oscillirender Funkenentladungen mit Hülfe des rotirenden Spiegels, bei denen die einzelnen Theilentladungen durch scharf begrenzte, völlig dunkle Zwischenräume getrennt sind.²⁾ Dass dies nicht immer der Fall, lässt sich leicht durch räumliche Ausdehnung und Verschiebung des Funkencanals, Nachleuchten u. s. w. erklären.

Durch Umformung der Gleichung (2) erhält man:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{p} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{pc} = - \frac{k}{p \frac{dq}{dt}}$$

Nun ist aber, wie wir sahen, für die einfache Entladung die Stromintensität $i = -dq/dt$ eine von dem fast augenblicklich erreichten Maximalwerthe an allmählich abnehmende Function der Zeit, die nur für den Beginn und das Ende der Entladung für $t = 0$ mit $t = t_1$, verschwindet. Innerhalb

1) Heydweiller, Wied. Ann. 38. p. 534. 1889.

2) Besonders schön z. B. bei Feddersen, Pogg. Ann. 116. Taf. I. Fig. 15. 1862.

gewisser hinreichend weit von jenen Endwerthen abliegender Grenzen kann man sich daher:

$$-\frac{k}{p} \frac{dq}{dt} = \frac{k}{p} i$$

nach steigenden Potenzen von t entwickelt denken. Alsdann erhält man eine Lösung der Differentialgleichung (2) von der Form:

$$q = \bar{q} + l + mt + nt^2 + \dots$$

und: $i = \bar{i} - m - nt - \dots$

wenn man mit \bar{q} und \bar{i} die der Differentialgleichung (1) genügenden Werthe von q und i und mit l, m, n gewisse von t unabhängige hier nicht näher zu bestimmende Coëfficienten bezeichnet.

Es folgt daraus, dass die Intensität des Entladungsstroms durch die Einschaltung der Funkenstrecke um einen mit der Zeit wachsenden Betrag vermindert wird; auch dies ist in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen meiner Experimentaluntersuchung über die Funkenentladung des Inductoriums¹⁾, die ganz ähnlichen Gesetzen folgt, wie die Condensatorentladung.

Für die Maximalintensität i_m lässt sich diese durch die Funkenstrecke bewirkte Verringerung berechnen. Führt man in die Differentialgleichung (2) die Werthe:

$$\frac{dq}{dt} = -i \quad \text{und:} \quad \frac{d^2q}{dt^2} = i \frac{di}{dq}$$

ein, so erhält man:

$$i^2 \left(p \frac{di}{dq} + r \right) - \frac{iq}{c} + k = 0.$$

Nun ist für $i = i_m$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{di}{dq} = 0,$$

mithin erhält man für i_m die quadratische Gleichung:

$$i_m^2 - i_m \frac{q_m}{rc} + \frac{k}{r} = 0,$$

wenn q_m den Werth von q bezeichnet zu der Zeit $t = t_m$, bei der $i = i_m$ ist. Hieraus folgt:

1) Heydweiller, l. c. p. 548 ff.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLIII.

$$i_m = \frac{q_m}{2rc} + \sqrt{\frac{q_m^2}{4r^2c^2} - \frac{k}{r}} = \frac{q_m}{2rc} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{4rc^2k}{q_m^2}} \right\}.$$

Das positive Vorzeichen der Wurzel ist zu nehmen, weil sonst für $k = 0$, d. h. ohne Funkenstrecke, $i_m = 0$ würde.

Nun sahen wir, dass für grosse Widerstände ohne Funkenstrecke t_m verschwindend klein ist, mithin ist in diesem Fall q_m sehr nahe gleich dem Anfangsverth q_0 der Ladung; das wird auch bei Einschaltung der Funkenstrecke gültig bleiben, da ja auch in diesem Fall das erste Ansteigen der Stromintensität sehr schnell geschieht. Es wird mithin für grosse Widerstände:

$$(3) \quad i_m = \frac{q_0}{rc} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4rc^2k}{q_0^2}} \right\},$$

während ohne Funkenstrecke $i_m = q_0/rc$ ist; die Klammergrösse in (3) stellt also den von der Funkenstrecke herührenden Verkleinerungsfactor der Maximalintensität dar. Aus (3) folgt, dass für Werthe von r , die grösser sind als:

$$r_0 = \frac{q_0^2}{4c^2k} = \frac{v^2}{4k},$$

i_m imaginär wird. Wir wollen die physikalische Bedeutung dieses Imaginärwerdens untersuchen.

In Abschnitt 5 sahen wir, dass für die einfache Entladung die entladene Electricitätsmenge mit wachsendem Widerstand bis zum Verschwinden abnimmt, und dass es lediglich den auftretenden intermittirenden Entladungen zuschreiben war, wenn bei gewissen grossen Widerständen, die eine bestimmte Grenze überschritten hatten, überhaupt noch messbare Electricitätsmengen entladen wurden. Wir dürfen annehmen, dass wenn unsere Hypothese über die Wirkung der Funkenstrecke richtig ist, jener Grenzwiderstand, für den die einfache Entladung verschwindend klein wird, zusammenfällt mit dem Widerstand r_0 , jenseits welches die maximale Stromintensität i_m imaginär wird.

Für $r = r_0$ ist daher q_0 gleich der zurückbleibenden Electricitätsmenge q_1 und da für jeden Widerstand die Beziehung $q_1^2/4rc^2 = k$ (p. 326) gilt, so folgt, dass die durch diese Beziehung in Abschnitt 7 definirte Constante k identisch ist mit der in Gl. (2) eingeführten Grösse k , die gleich $q_0^2/4r_0c^2$ ist;

oder mit anderen Worten, die obige Constante k ist die in der Zeiteinheit im Funken geleistete Arbeit. Diese ist aber auch gleich der Grösse f/t_1 der Tabellen 11 und 12, und die Theorie ergibt mithin die Gleichheit dieser beiden Werthe.

Dass dieselbe, soweit die beschränkte Genauigkeit der Messungen es zulässt, durch diese bestätigt wird, ergibt die Vergleichung der bezüglichen Werthe in den Tabellen 4 und 11, resp. 5 und 12.

Die Gl. (3) ist auch diejenige, welche im Abschnitt 10 zur Berechnung der Maximalintensitäten gedient hat. Für k wurden dabei aus den Tabellen 4 und 5 folgende Werthe, und zwar $k = 2,6$ für 0,3 cm und $k = 1,6$ für 0,2 cm Funkenstrecke angenommen, da die dort angegebenen Mittelwerthe wahrscheinlich zu klein sind. Für den von der Funkenstrecke herrührenden Verkleinerungsfactor (Gl. 3) berechneten sich danach folgende Werthe:

$$\begin{array}{llllll} \text{für } r = 0,6 & 1,3 & 4,0 & 5,5 & 6,8 \text{ Megohm} \\ \text{und 0,3 cm Funken:} & 0,99 & 0,96 & 0,91 & 0,87 & 0,84 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{für } r = 0,9 & 3,2 & 3,9 & 5,4 & 7,4 \text{ Megohm} \\ \text{und 0,2 cm Funken:} & 0,98 & 0,93 & 0,91 & 0,87 & 0,82 \end{array}$$

Die Widerstände r_0 , bei denen die einfache Entladung verschwindend klein wurde, ergeben sich mit den Werthen

$$\begin{array}{llll} \text{von } k: & 1,0 & 1,6 & 2,6 \\ \text{für die Funkenstrecke:} & 0,1 & 0,2 & 0,3 \text{ cm,} \\ r_0 = 5,7 & 11,5 & 12,5 \text{ Megohm,} \end{array}$$

eine natürlich nur annähernde Bestimmung, in Uebereinstimmung mit welcher sich aber aus dem in Abschnitt 5 Bemerkten und aus Tab. 1 ergibt, dass bei grösseren, als den hier angegebenen Widerständen die Entladungen wegen starker Intermittenz sehr unregelmässig und die (nicht immer auftretenden) einfachen Entladungen sehr klein werden.

12. Der Leitungswiderstand der Funkenstrecken.

Wenn es nunmehr auch zweifellos scheint, dass die Hauptwirkung der Funkenstrecke nicht einem Leitungswiderstände derselben zugeschrieben werden kann, so wäre doch noch die Frage, ob nicht ein kleinerer Theil der gesamten Funkenarbeit von Joule'scher Wärme des hindurchgehenden Electricitätsstromes herrühre. Hierüber geben die im Vorstehenden mitgetheilten Messungen keine Auskunft. Es

lässt sich aber auf Grund anderer Versuche zeigen, dass der eigentliche Leitungswiderstand und mithin auch die Joule'sche Wärme in der Funkenstrecke verhältnismässig klein, und für unsere Versuche sogar verschwindend klein sind.

Man hat mehrfach die Schwingungsdauer der oscillirenden Entladungen gemessen und mit den theoretisch berechneten Werthen verglichen. Die bisher wohl genauesten diesbezüglichen Versuche unter Anwendung eines Luftcondensators haben vor kurzem die Herren Trowbridge und Sabine¹⁾ veröffentlicht.

Die Messungen wurden dabei unter Einschaltung einer Funkenstrecke vorgenommen, während der theoretischen Berechnung die Annahme eines leitenden Schliessungsbogens zu Grunde gelegt ist. Dies ist insofern berechtigt, als die Funkenstrecke jedenfalls die Schwingungsdauer nur dann beeinflussen wird, wenn sie einen erheblichen Leitungswiderstand besitzt. Trowbridge und Sabine nehmen an, dass der Leitungswiderstand des ganzen Schliessungsbogens (die Funkenstrecke also einbegriffen) gegen den Grenzwiderstand $2\sqrt{p/c}$ zu vernachlässigen sei und setzten demgemäß die Schwingungsdauer:

$$\tau = 2\pi\sqrt{p/c},$$

während der genauere Werth ist:

$$\tau = \frac{2\pi\sqrt{p/c}}{\sqrt{1 - \frac{p^2c}{4p}}},$$

also grösser, als jener, sobald r einen erheblichen Werth hat.

Bei den Versuchen von Trowbridge und Sabine war:

$$p = 39700 \text{ cm}, \quad c = \frac{5518}{9 \times 10^{16}} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2,$$

$$\text{mithin:} \quad 2\pi\sqrt{p/c} = 3,10 \times 10^{-6} \text{ sec.}$$

Die beobachtete Schwingungsdauer dagegen betrug im Mittel:

$$\tau = 3,137 \times 10^{-6} \text{ sec.}^2)$$

1) Trowbridge u. Sabine, Phil. Mag. (5) 30. p. 323. 1890.

2) Die Abweichungen von diesem Mittelwerth, welche die Verfasser Vorgängen im Dielectricum des Condensators zuschreiben, lassen sich wohl ungezwungener durch räumliche Verschiebungen der einzelnen Theilentladungen gegeneinander erklären.

Sieht man von Beobachtungsfehlern ab, und schreibt den Unterschied von 1,2 Proc. zwischen den beiden Werthen lediglich dem Einfluss von r zu, so würde daraus folgen, dass:

$$\frac{1}{4} \frac{r^2 c}{p} = \frac{1,2}{100} \quad \text{oder} \quad r = 27,7 \times 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 27,7 \text{ Ohm}$$

ist. Da der wirkliche Leitungswiderstand des Schliessungsbogens 1,5 Ohm betrug, so wäre demnach der Widerstand der 0,23 cm langen Funkenstrecke etwa gleich 26 Ohm.

Jedenfalls darf man aus den Versuchen entnehmen, dass er nicht von wesentlich höherer Grössenordnung sein kann und mithin gegen die bei unseren Versuchen benutzten Leitungswiderstände in der That vernachlässigt werden darf.

13. Zusammenfassung.

Es lassen sich nach Vorstehendem mit einer gewissen Annäherung folgende Gesetze für die einfachen Funkenentladungen von Condensatoren aufstellen, die freilich durch eintretende Intermittenz vielfach verdeckt werden.

1. Die entladenen Electricitätsmengen und ebenso die zurückbleibenden Ladungen sind bei allen Widerständen des Schliessungsbogens den Capacitäten proportional.

2. Die entladenen Electricitätsmengen nehmen bei wachsendem Widerstande bis zum Verschwinden ab.

3. Die zurückbleibenden Ladungen q_1 sind den Quadratwurzeln aus den Leitungswiderständen proportional. Es ist daher $k = q_1^2 / 4c^2 r$ für eine gegebene Funkenstrecke eine von der Capacität c und dem Widerstande r unabhängige Constante.

4. Die Arbeit in der Funkenstrecke ist der Dauer der Entladung nahe proportional und unabhängig von der Stromstärke.

5. Die obige Constante k ist nahe gleich der in der Zeiteinheit im Funken geleisteten Arbeit.

6. Der Leitungswiderstand kleiner Funkenstrecken (von einigen Millimetern Länge) ist von nicht wesentlich höherer Grössenordnung, als 10 bis 10^2 Ohm.

7. Die Hauptwirkung der Funkenstrecken auf die Entladung ist daher nicht dem Leitungswiderstand derselben zuzuschreiben, sondern einer für eine gegebene Funkenstrecke

in der Zeiteinheit nahe constanten, von der Stromintensität unabhängigen Arbeit, die vermutlich zur Erhaltung der Entladungsspannung erforderlich ist.

Die Differentialgleichung, welche hiernach für die Funkenentladung von Condensatoren aufzustellen ist, ist zur Zeit nicht integrirbar. Die Folgerungen, welche sich daraus ziehen lassen, stimmen mit der Erfahrung überein.

Die vorliegende Arbeit bedarf noch nach mehrfacher Richtung der Ergänzung; vielleicht kann ich im Laufe der Zeit noch einiges dazu beitragen.

Hrn. W. C. Röntgen schulde ich für die freundliche Bereitwilligkeit, mit der er die Mittel des hiesigen physikalischen Instituts für diese und andere Arbeiten zu meiner Verfügung gestellt hat, besten Dank.

Würzburg, im April 1891.

Nachträglicher Zusatz. Erst nach Absendung der vorstehenden Arbeit kam mir der ausführliche Bericht über Hrn. Miesler's Messungen der Schwingungsdauer oscillirender Condensatorentladungen¹⁾ zu Gesicht. Aus denselben würde sich ein noch kleinerer oberer Grenzwerth für den Leitungswiderstand von Funkenstrecken ergeben, als der in Abschnitt 12 abgeleitete, wenn nicht möglicherweise bei diesen mit einem Glascondensator ausgeführten Versuchen die Leistungsfähigkeit des Dielectricums (Glas) im Condensator eine Herabsetzung der Schwingungsdauer bewirkt haben könnte.²⁾

1) Miesler, Wien Ber. 99. p. 579. 1890.

2) Vgl. Schiller, Pogg. Ann. 152. p. 535. 1874.

VII. *Ueber die Periode sehr schneller electrischer Schwingungen;* *von E. Cohn und F. Heerwagen.*

Die Entladung eines Condensators durch einen Draht von nicht zu grossem Widerstand ist bekanntlich oscillatorisch. Die Periode der Schwingungen ist bei verschwindendem Widerstand der Leitung:

$$T = A \cdot \pi \cdot \sqrt{pc},$$

wo p den Selbstinductions-Coëfficienten des Entladungskreises in magnetischem Maass, c die Capacität des Condensators in electrischem Maass, und A die Reductionszahl der beiden Maasssysteme (das Reciproke der Lichtgeschwindigkeit) bedeutet. Diese Gleichung, welche zuerst wohl von W. Thomson aufgestellt wurde, ist an Messungen von Feddersen, Schiller u. a. geprüft worden und hat sich dabei völlig bewährt. Die Schwingungszahlen stiegen bei diesen Versuchen bis zu ca. 1 Million in der Secunde.

Sehr viel schnellere Schwingungen hat dann Hertz hervorbringen und beobachten gelehrt. Die quantitative Untersuchung dieser Hertz'schen Schwingungen hat sich aber wesentlich nur mit der räumlichen Vertheilung, insbesondere der Messung von Wellenlängen, beschäftigt. Eine direkte Messung der äusserst kleinen Schwingungszeiten ist bisher nicht gelungen. Man ist also für die Bestimmung dieser Grössen, sofern nicht etwa für eine bestimmte Ausbreitungsform die Fortpflanzungsgeschwindigkeit anderweitig bekannt ist, auf die Theorie angewiesen.

Auf solchem Wege glaubte Lecher¹⁾, mit Hülfe der von ihm gefundenen ebenso eleganten wie genauen Methode zur Ausmessung electrischer Wellen, Schwingungsdauern

1) Lecher, Wien. Sitzber. 99. p. 340. 1890 u. Wied. Ann. 41. p. 850. 1890. — Hertz selbst hat die Theorie nur zu Rath gezogen, um über die Grössenordnung der Schwingungsdauer Aufschluss zu gewinnen; s. Wied. Ann. 31. p. 444. 1887 u. 34. p. 559. 1888.

und indirect Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmen zu können. Das Princip seiner Rechnung ist das folgende: Zwei Drahtkreise sind in Resonanz; der erste von ihnen ist metallisch geschlossen und gibt durch directe Ausmessung die Wellenlänge. Der zweite ist an einer Stelle unterbrochen und endet dort in einen Condensator; aus ihm berechnet Lecher nach der oben angeführten Thomson'schen Formel die Schwingungsdauer. Beide Grössen zusammen ergeben dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V' der Wellen längs den Drähten. Bei der Ausrechnung fand sich dieselbe identisch mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit V im freien Raum. Dieses Resultat schien um so interessanter, als die ersten Versuche von Hertz in dieser Beziehung Widersprechendes ergeben hatten, und die Frage, ob $V = V'$ sei, zur Zeit der Lecher'schen Versuche als eine offene betrachtet werden musste.

Die Berechnung Lecher's gibt aber zu Bedenken Anlass: Bei der Ableitung der Thomson'schen Gleichung wird vorausgesetzt, dass die Stromintensität in jedem Moment längs der ganzen Leitung dieselbe sei. In Lecher's Versuchen aber war die Drahtlänge des offenen Kreises vergleichbar mit der Wellenlänge, also waren in ihm gleichzeitig sehr verschiedene Schwingungszustände vertreten.

Es schien uns deshalb wünschenswerth, die Lecher'schen Versuche zu wiederholen unter möglichster Variation der Versuchsbedingungen: Veränderung der Wellenlänge, der Kapazität des Condensators, der Form des Drahtkreises. — Wir haben dies ausgeführt und ein ziemlich umfangreiches Beobachtungsmaterial gesammelt. Aus demselben ging zunächst hervor, dass Lecher's Resultat als ein zufälliges angesehen werden muss, dass man auf dem gleichen Wege unter verschiedenen Versuchsbedingungen sehr verschiedene Werthe von V' erhält. Hieran ist nicht nur die unzulässige Annahme einer räumlich constanten Stromintensität, sondern auch, wie sich unten zeigen wird, die Verwendung einer unrichtigen Formel zur Berechnung des Selbstinductionscoefficienten Schuld.

Es bietet sich aber zur Berechnung der Schwingungsdauer der folgende Weg: Nach den letzten Untersuchungen

von Sarasin und de la Rive¹⁾ dürfen wir als ein directes Ergebniss der Beobachtungen ansehen, dass einer bestimmten Schwingungsdauer eine bestimmte Wellenlänge entspricht, gleichviel ob die Ausbreitung der Wellen ungehindert im freien Raum, oder ob sie längs Metalldrähten stattfindet, dass also mit Benutzung der obigen Zeichen $V' = V$ ist. Dass aber andererseits V identisch mit $1/A$ ist, steht für uns fest, sobald wir uns auf den Boden der Maxwell'schen Theorie stellen.

Mit diesem Werthe von V' ist nun aber sofort auch die Form der am Draht entlang gleitenden Welle festgelegt: Sie ist, wie Hertz²⁾ gezeigt hat, eine reine Transversalwelle, und durch Angabe der Schwingungsdauer und Amplitude völlig bestimmt. Man kennt also auch die electromagnetische Energie dieser Schwingung.

Es ist ferner leicht, die Energie der electrischen Oscillationen zu berechnen, die in einem cylindrischen Raum zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen ebenen Leiteroberflächen möglich sind. Dieselbe ergibt sich unter den Versuchsbedingungen bis auf verschwindende Correctionen gleich der electrostatischen Energie desselben Condensators unter entsprechenden Verhältnissen.

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen wird man dann zu folgendem Ansatz geführt:

- a) die Energie beider Systeme (Drahtleitung und Condensator) hat eine von der Zeit unabhängige Summe;
- b) die electromotorische Kraft zwischen den Drahtenden nächst dem Condensator ist identisch mit der electromotorischen Kraft zwischen den Condensatorplatten.

Dieser Ansatz entspricht völlig dem Thomson'schen. Er führt zu einer einfachen Beziehung zwischen Capacität, Selbstinductionscoefficient und Wellenlänge (oder Schwingungsdauer), welche die Thomson'sche Formel als Grenzfall in sich begreift. — Diese Beziehung wird durch die Beobachtungen in befriedigender Weise bestätigt.

1) Sarasin u. de la Rive, Arch. des sc. Phys. et Nat. (3) 23. p. 557. 1890.

2) Hertz, Wied. Ann. 36. p. 19. 1889.

Versuchsanordnung.

Die von uns benutzte Beobachtungsmethode war die Lecher'sche. Durch ein grosses Ruhmkorff'sches Inductorium wird die „primäre Schwingung“ erregt. (Vgl. zum Folgenden Fig. 1.)

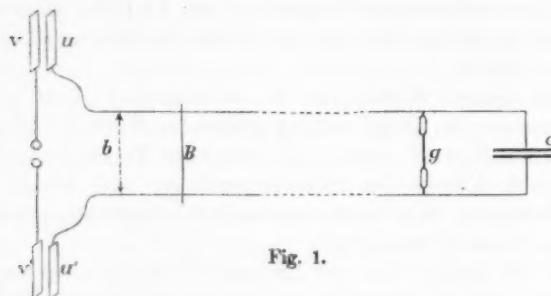


Fig. 1.

Zwei Messingstangen von je 31 cm Länge enden an den einander zugewandten Seiten in Messingkugeln von $3\frac{1}{2}$ cm Durchmesser, zwischen denen beim Spiel des Inductoriums Funken von 0,5 bis 1 cm überspringen. An den äusseren Enden sind den Stangen zwei quadratische Platten vv' von 20 cm Seite angefügt. Ihnen gegenüber stehen, in ca. 6 cm Abstand durch hölzerne Rahmen fixirt, zwei ihnen gleiche Platten uu' , von denen zwei Kupferdrähte zunächst in kurzem Bogen, dann geradlinig und parallel in horizontaler Richtung weiterführen auf eine Strecke von ca. 11 m. Der Radius a der Drähte ist 0,1 cm, ihr Abstand b in einigen Versuchsreihen 10, in anderen 30 cm. Die Höhe über dem Fussboden beträgt 120 cm. Die Enden führen mit rechtwinkeliger Biegung zu einem Kohlrausch'schen Plattencondensator c , dessen kreisförmige Platten den veränderlichen Abstand ϵ haben. Der Condensator ist entweder aus Platten vom Radius $r = 5$ cm und Dicke $d = 0,2$ cm, oder aus solchen vom Radius $r = 10$ cm und Dicke $d = 0,3$ cm gebildet. Das Holzgestell des Condensators steht auf einer Steinconsole. Das ganze System von Drähten und Platten, mit Ausnahme der „primären Schwingung“ soll als „secondärer Kreis“, die quadratischen Platten uu' desselben ins-

besondere sollen als „secundäre Platten“ bezeichnet werden. — Innerhalb jeder der beiden Hauptgruppen von Beobachtungen, welche zu den Drahtabständen $b = 10$ cm, resp. $b = 30$ cm gehören, wurden Veränderungen lediglich am Condensator c vorgenommen; im übrigen blieb sowohl der secundäre Kreis, wie seine Lage gegen die primäre Schwingung unberührt. — Hinzugefügt sind einige Beobachtungen, bei welchen zwischen secundären Platten und Drahtleitung noch Drahtschleifen von 100, resp. 200 cm Länge eingeschaltet waren.

Zwei beliebige gegenüberstehende Punkte der Paralleldrähte können durch eine „Brücke“ B aus Kupferdraht verbunden werden; der letztere ist geradlinig mit kurzen Biegungen an den Enden, mittelst deren er auf den Paralleldrähten ruht; seine Länge übertrifft also um wenige Centimeter den Abstand b .

An einer anderen Stelle wird zwischen die Paralleldrähte eine Geissler'sche Röhre g eingeschaltet. Diese Röhre bleibt im allgemeinen dunkel beim Spiel des Inductoriums, sobald die Brücke vorgelegt ist; sie leuchtet aber auf bei bestimmten Lagen von B und g . Dann finden electrische Schwingungen des Systems statt, für welche in der Brücke ein Knoten liegt. Die experimentelle Aufgabe besteht in der Aufsuchung dieser Knoten k . Ihre Lage wird mittelst Ablothen an einer Metertheilung abgelesen, die sich unter den Drähten auf dem Fussboden befindet. Der Anfangspunkt dieser Theilung ist willkürlich in der Nähe der secundären Platten gewählt. Die Lage des Endpunktes der Drähte am Condensator soll mit t bezeichnet werden.

Lecher selbst hat Röhren ohne Electroden benutzt. Es kam uns aber darauf an, auch sehr schwache Schwingungen messen zu können, und dann ist es unerlässlich, empfindliche Geissler'sche Röhren durch ihre eingeschmolzenen Electroden in metallische Verbindung mit den Paralleldrähten zu bringen. Wir haben uns durch mannigfache Controlen überzeugt, dass der Energieausgleich in der Geissler'schen Röhre die electrischen Schwingungen des Systems nicht messbar beeinflusst, — mit anderen Worten, dass sich zwei durch die Röhre verbundene Punkte für unsere Beob-

achtungen durchaus wie electricisch voneinander isolirte Punkte verhalten.

Die Beobachtungen wurden im verdunkelten Zimmer ausgeführt. Während ein Beobachter die Röhre im Auge behielt, verschob der andere in kurzen Absätzen die Brücke; war die ungefähre Lage eines Knotens gefunden, so wurden von ihr aus gleiche Verschiebungen nach beiden Seiten gemacht, die Helligkeiten bei beiden Seitenlagen gegen einander und gegen die Mittellage abgeschätzt; nach dem Ausfall dieser Schätzung die Mittellage verändert, und so durch Eingrenzen die Lage von k ermittelt. Die Weite der letzten Verschiebungen betrug für den Drahtabstand $b = 30$ cm in der Regel 6 cm nach jeder Seite, für $b = 10$ cm hingegen höchstens 4 cm und oft kaum 3 cm. Der mittlere Fehler für die Bestimmung eines einzelnen Knotens ist im Durchschnitt für die erste Gruppe auf etwa 3 cm, für die zweite auf kaum mehr als 1 cm zu schätzen.

Beobachtungsresultate.

Das Absuchen der Paralleldrähte mittelst der Brücke ergibt, wie Lecher gezeigt hat, eine unter Umständen beträchtliche Zahl von Knoten, die sich in folgender Weise in einzelne Gruppen gliedern. Die Knoten jeder Gruppe sind äquidistant, und eine Röhre, die sich im Intervall hinter dem letzten Knoten befindet, fährt fort zu leuchten, auch wenn man mehrere Knoten der Gruppe oder alle gleichzeitig überbrückt. Im Anschluss an die Ausdrucksweise der Akustik können wir sagen: Das System¹⁾ kann mit seinem Grundton, sowie mit einer Anzahl von Obertönen schwingen. Man findet die Knoten aller dieser Partialtöne am vollständigsten und genauesten, indem man nach einer ersten orientirenden Durchmusterung je die geeignete Stelle für die Röhre g aussucht. Diese ist im allgemeinen der Schwingungsbauch des betreffenden Tones in dem Intervall, welches dem gesuchten Knoten zunächst folgt. Es kann aber unter Umständen dieser Knoten sehr nahe bei dem Knoten einer anderen Schwingung liegen; derselbe kann dann gleichwohl fehlerfrei bestimmt werden, indem man die Röhre g auf

1) Freilich nur angenähert stets das gleiche System (vgl. unten p. 349).

einen Knoten der störenden Schwingung legt. In einzelnen seltenen Fällen freilich versagt auch dieses Hülfsmittel. Von diesen Fällen abgesehen haben wir stets sämmtliche Knoten der vollständigen Reihe der Obertöne bis zu einer bestimmten Ordnungszahl aufgefunden, und zwar stets bis zum fünften, häufig bis zum sechsten Oberton.

Die Reihe dieser Obertöne ist nun keine harmonische; die äussersten Intervalle sind kleiner als die halbe Wellenlänge und im allgemeinen in irrationalem Verhältniss zu derselben. Sei λ die Wellenlänge und bezeichnen wir bei gegebener Form des ganzen Systems die Länge der äusseren Intervalle am primären und am Condensatorende bzw. durch:

$$z' = \varphi(\lambda) \quad \text{und} \quad z = f(\lambda)$$

und die gesammte „reducirte“ Drahtlänge durch l , so sind sämmtliche mögliche Knoten k_n offenbar gegeben durch:

$$\begin{cases} z' + n \lambda_n + z = l, & n = 0, 1, 2, 3 \dots \\ s + k_n^i = z' + i \lambda_n = l - [z + (n - i) \lambda_n], & i = 0, 1, 2, \dots n, \end{cases}$$

wo s eine Constante.

Die reducirete Länge ist nicht identisch mit der that-sächlichen Länge der beiden parallelen Drähte; die letztere wird vielmehr vermehrt durch die Brücke und durch die Ansatzstücke, welche an beiden Enden die Verbindung mit den Platten herstellen. Die diesen Zusatzstücken äquivalente Drahtstrecke lässt sich aus den Abmessungen nicht genau berechnen, ja man wird nicht einmal ohne weiteres annehmen dürfen, dass sie für jede Wellenlänge dieselbe ist. Es bleibt also nur übrig, sie empirisch zu bestimmen. Wohl aber sind, wie leicht ersichtlich, für jeden einzelnen Wellenzug $z z' l$ und s Constante. s ist der Abstand des Nullpunktes der Theilung vom „primären Ende“, vermehrt um die der halben Brücke äquivalente Zusatzlänge; man erhält also, indem man die Brücke verschiebt, die Wellenlänge richtig ausgedrückt durch $\lambda_n = k_n^{i+1} - k_n^i$. Aber man würde nicht genau den richtigen Werth erhalten, wenn man die Brücke bei k_n^i ruhen liesse und mittelst einer zweiten Brücke k_n^{i+1} bestimmen wollte, — wie dies oben der Einfachheit wegen und in Uebereinstimmung mit Lecher's Darstellung gesagt ist.

Den Gegenstand der Untersuchung bildet die Function $z = f(\lambda)$, in welche als Parameter die Constanten eingehen, durch welche das Drahtsystem und der Condensator definiert sind. Qualitativ ergeben die Versuche Folgendes: Seien zunächst die Condensatorplatten bis zur Berührung genähert ($\epsilon = 0$); dann ist auch der letzte Theilabschnitt des Wellenzuges metallisch geschlossen; er bildet eine volle Welle, und seine Länge wird gleich der Länge der übrigen sein, sofern man von den kleinen Abweichungen absieht, welche durch die unregelmässige Form des Endes bedingt sind: Alle Wellen haben am Condensatorende einen Knoten, dessen genaue Lage t sich aus jedem Wellenzuge durch Extrapolation ergibt. — Entfernt man jetzt die Condensatorplatten voneinander, so treten diese Knoten aus dem Condensatorende heraus und schieben sich gegen das primäre Ende; die Phase des Endpunktes t wächst von 0 aus; sie wächst weiter, je weiter man den Condensator öffnet, seine Capacität vermindert; sie erreicht ihren grössten Werth, der nahe bei 0,5 (Schwingungsbauch) liegt, wenn man die Capacität auf ihr Minimum reducirt, indem man die Paralleldrähte frei endigen lässt.¹⁾

Zur Beurtheilung der Messungen ist eine graphische Darstellung aller Beobachtungen weitaus am geeignetsten; dieselbe erfordert jedoch einen so grossen Maassstab, dass ihre Mittheilung unmöglich ist; wir sind deshalb genöthigt, ein grösseres Zahlenmaterial vorzulegen und geben zunächst eine Reihe mit geschlossenem Condensator ($\epsilon = 0$). S. Tab. I.

Die ersten sechs Spalten geben die Knoten k_n^0 bis k_n^{n-1} der sechs ersten Schwingungen $n = 1, 2 \dots 6$, die letzten zwei Spalten geben die, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten, Werthe der Wellenlänge λ_n und des letzten Knoten k_n^n . Die Knoten k_4^0, k_5^0, k_6^0 fallen bereits in die Verbindungsstücke der Paralleldrähte mit den Platten des primären Endes und konnten deshalb nicht beobachtet werden. Unter die beobachteten k_n^i sind überall da, wo die Anzahl der Beobachtungen eine Controle gestattet, in Klammern die als wahrscheinlichste berechneten Werthe gesetzt.

1) Vgl. Sarasin u. de la Rive, Arch. des sc. phys. et nat. (3) 23, p. 113. 1890; u. Lecher l. c.

Tabelle I.

Abstand der Paralleldrähte $b = 10$ cm
 Grosser Condensator-Radius $r = 10$ cm
 Plattenabstand $\epsilon = 0$.

n	k_n^0	k_n^1	k_n^2	k_n^3	k_n^4	k_n^5	k_n	$k_n^6 = t$
1	231							
2	75	574					499,0	1073
3	12 (12,7)	368 (366,7)	720 (720,7)				354,0	1074,7
4	—	253 (253,5)	529 (528,0)	802 (802,5)			274,5	1077,0
5	—	184 (183,6)	406 (406,7)	630 (629,8)	858 (852,9)		223,1	1076,0
6	—	131 (131,2)	320 (320,3)	511 (509,4)	697 (698,5)	888 (887,6)	189,1	1076,7

Es folgen zwei Beobachtungsreihen mit dem gleichen Drahtabstand und dem gleichen Condensator, dessen Platten aber jetzt den Abstand 0,5, resp. 2 cm besassen.

Tabelle II.

Drähte:
 $b = 10$ cm
 $a = 0,1$ cm

Condensator:
 $r = 10$ cm
 $\epsilon = 0,5$ cm

Zur Rechnung:
 $q = 18,42$
 $c = 49$

n	k_n^0	k_n^1	k_n^2	k_n^3	k_n^4	k_n^5	k_n^6	k_n	z_n	t
0	752									
1	211	1007						796	69,3	1076,3
2	71	559,5 (1048)						488,5	26,5	74,5
3	12 (11,3)	360 (361,3)	712 (711,3)	1061,3				350,0	13,7	75,0
4	—	253 (252,7)	523 (528,7)	795 (794,7)	1065,7			271,0	8,2	73,9
5	—	182 (182,1)	404 (404,2)	627 (626,3)	848 (848,4)	1070,5		222,1	5,5	76,0
6	—	130 (130,4)	319 (318,9)	508 (507,4)	696 (695,9)	884 (884,4)	1072,9	188,5	4,0	76,9

In Tab. II sind die nicht eingeklammerten Werthe der k_n^i beobachtete. Der Beobachtung entzogen sich, wie in Tab. I, die Werthe k_n^0 , k_n^1 , k_n^2 und aus gleichem Grunde k_n^3 , k_n^4 , k_n^5 , k_n^6 . Die in Klammern beigefügten Werthe

der k_n^i und ebenso die λ_n sind, wie in Tab. I, als wahrscheinlichste Werthe berechnet. Die vorletzte Spalte enthält die Länge z der letzten, offen schwingenden Abtheilung, welche aus der später zu entwickelnden Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi q c}$$

für die zugehörige Wellenlänge λ folgt. In derselben ist:

$$q = 4 \log \operatorname{nat} \left(\frac{b}{a} \right).$$

c eine Grösse, welche als Capacität des Condensators bezeichnet werden kann. Die Werthe q und c stehen über der Tabelle. Die letzte Spalte enthält die aus der Lage des letzten Knotens und dem Werthe von z folgende Lage des Endpunktes $t = k_n^n + z_n$.

Tabelle III.

Drähte $b = 10$ cm Condensator $r = 10$ cm Zur Rechnung
 $a = 0,1$ cm $s = 2$ cm $q = 18,42$

n	k_n^0	k_n^1	k_n^2	k_n^3	k_n^4	k_n^5	k_n^6	λ_n	$c = 15,7$	$c = 16,8$
	z_n	t	z_n	t	z_n	t	z_n	t	z_n	t
0	577									
1"	46	882						836	197,9	1079,9
1'	131	905						774	173,8	78,8
1	181	918						737	159,9	77,9
2	64	534	1001					468,5	71,0	72,5
	(64,5)	(533,0)	(1001,5)						68,8	70,3
3	8	352	691					341,5	89,1	72,4
	(8,8)	(350,8)	(691,8)	(1033,3)					37,8	71,1
4	—	246	514	781				267,5	24,4	73,1
		(246,2)	(513,7)	(781,2)	(1048,7)				23,5	72,2
5	—	179	397	618	838			219,8	16,6	74,1
		(178,3)	(398,1)	(617,9)	(837,7)	(1057,5)			16,0	73,5
6	—	128	315	501	—	877		187,2	12,1	75,8
		(127,6)	(314,8)	(502,1)	(689,3)	(876,5)	(1063,7)		11,7	75,4

Die Tab. III ist wie Tab. II eingerichtet. Die mit den Ordnungszahlen 1" und 1' bezeichneten Wellen wurden erhalten, indem man zunächst dem primären Ende Drahtschleifen von 2, resp. 1 m Länge in die Leitung einschaltete. Der Knoten k_n^4 konnte nicht bestimmt werden, weil der Knoten k_n^2 des Wellenzuges λ_3 ihm sehr nahe liegt, während

der einzige weitere Knoten k_3^3 der letzteren Welle ebenfalls mit einem Knoten k_6^6 von λ_6 nahe zusammen fällt.

Vor den bisher mitgetheilten Versuchen war bereits eine grössere Anzahl von Beobachtungsreihen mit dem Drahtabstand $b = 30$ cm angestellt worden. Die Genauigkeit derselben steht hinter derjenigen der späteren beträchtlich zurück. Sie genügen jedoch in Verbindung mit den genaueren Beobachtungen der anderen Gruppe, um die im Folgenden theoretisch entwickelte Beziehung zu stützen. Wir beschränken uns darauf, die Werthe der λ_n , z_n , t nebst den zur Berechnung benutzten q und c zu geben.

Tabelle IV.

$b = 30$, $\alpha = 0,1$, $q = 22,82$, $r = 10$.

n	$s = 0,5$ $c = 48$			$s = 2,0$ $c = 16,2$			$s = 4,0$ $c = 10,1$		
	λ_n	z_n	t	λ_n	z_n	t	λ_n	z_n	t
1''	—	—	—	868	177	1090	832	226	1088
1'	—	—	—	808	156	85	777	203	86
1	—	—	—	770	144	88	738	187	86
2	500	23	1086	487	62	91	478	89	94
3	358	12	89	358	33	92	348	50	94
4	276	7	89	274	20	90	271	31	88
5	226	5	91	224	13	86	221	21	86

Tabelle V.

$b = 30$, $\alpha = 0,1$, $q = 22,82$, $r = 5$.

n	$s = 0,5$ $c = 15,5$			$s = 1,0$ $c = 9,3$			$s = 2,0$ $c = 6,1$		
	λ_n	z_n	t	λ_n	z_n	t	λ_n	z_n	t
1''	859	180	1085	825	284	1086	800	273	1087
1'	802	160	88	769	210	84	747	248	86
1	763	146	84	733	194	87	709	230	87
2	482	68	84	472	92	84	462	120	84
3	350	34	88	345	52	88	338	71	83
4	273	21	88	268	32	81	265	46	84
5	222	14	86	221	23	88	218	32	85

Zur Berechnung der Versuche müsste, wie oben erwähnt, die electrostatische Capacität der Condensatoren bekannt sein. Genauer: seien die Electricitätsmengen der Platten e_1 und e_2 , die Potentiale U_1 und U_2 , die electrostatische Energie des Systems W'_e , sodass:

$e_1 = \beta U_1 - \gamma U_2$, $e_2 = \beta U_2 - \gamma U_1$ und $W_e' = \frac{1}{2} (e_1 U_1 + e_2 U_2)$, sei ferner, wie es bei den Versuchen der Fall war:

$$U_1 = -U_2 = \frac{U}{2}, \text{ und folglich } W_e' = \frac{1}{2} \frac{\beta + \gamma}{2} U^2;$$

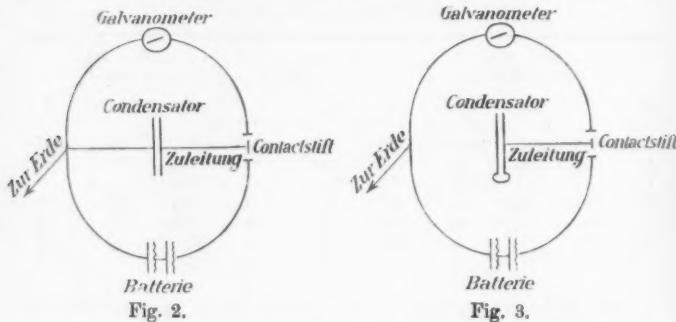
dann wurde gefordert die Kenntniss von:

$$c = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Für den Kreisplattencondensator hat Kirchhoff gefunden¹⁾:

$$c = \frac{r^2}{4\epsilon} + \frac{r}{4\pi} \left[-1 + \log \frac{16\pi(\epsilon + d)r}{\epsilon^2} + \frac{d}{\epsilon} \log \frac{\epsilon + d}{d} \right],$$

wo r den Radius, ϵ den Abstand und d die Dicke der Platten bedeutet. — Die Ableitung dieser Formel ist aber an vereinfachende Voraussetzungen geknüpft, die bei unserer Anordnung nicht mehr zutreffen. Wir haben deshalb die Größen c experimentell zu bestimmen gesucht. Bei der Kleinheit der zu messenden Capacitäten versprach folgende Methode die relativ besten Resultate. Eine Stimmgabel von 123,3 Vollschwingungen trug an einer Zinke einen Contactstift, welcher während jeder Schwingung einmal den Condensator mit einer Kette von 30 Chromsäureelementen in Verbindung setzte, und ebenso oft die Entladung des Condensators durch ein empfindliches Galvanometer vermittelte. Für jede



Condensatoranordnung wurden zwei Bestimmungen gemacht: Bei der einen war eine Condensatorplatte dauernd zur Erde

1) Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 112.

geleitet, die zweite wurde abwechselnd geladen und entladen (s. das Schema Fig. 2); bei der anderen waren die Condensatorplatten miteinander verbunden, im übrigen aber isolirt (s. Fig. 3). Die erste Bestimmung liefert — zunächst in relativem Maass —: β , die zweite: $2(\beta - \gamma)$, je vermehrt um die Capacität des Zuleitungsdrähtes, die durch eine besondere Messung ermittelt und in Abzug gebracht wurde. Indem man ferner einen schwachen Theilstrom der gleichen Batterie stationär durch dasselbe Galvanometer sendet, erhält man aus den absoluten Werthen von Widerstand und Schwingungszahl die Capacitäten in absolutem Maass.

Die so gefundenen c sind in electrostatischem Maasse in Centimetern in der zweiten Spalte der folgenden Tabelle angeführt; die nächste enthält die nach Kirchhoff berechneten Werthe; in der letzten endlich sind die Werthe c wiederholt, die sich über den Tabellen II bis V finden.

Tabelle VI.

s	c electrostat. gemessen	c nach Kirchhoff ber.	c aus Schwingungen abgeleitet
$r = 10$	0,5	56,9	49 u. 48
	2,0	18,6	16,3 u. 16,2
	4,0	11,8	10,1
$r = 5$	0,5	16,4	15,5
	1,0	10,0	9,3
	2,0	6,6	6,1

Eine Discussion dieser Zahlen wird im letzten Abschnitt gegeben werden.

In gleicher Weise wurde die Capacität C des Systems der zwei parallelen Drähte bei dem Abstand $b = 30$ cm bestimmt; die Beobachtung ergab für $L = 1075$ cm Drahtlänge: $C = 48,0$ cm; die Berechnung nach bekannten electrostatischen Formeln ($\beta = \gamma = L/(4 \log b/a)$ bei Vernachlässigung der Endcorrectionen) gibt: $C = 47,1$ cm.

Zur Theorie.

Das Folgende schliesst sich unmittelbar an den letzten Abschnitt des Hertz'schen Aufsatzes: „Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen

Theorie¹⁾ an. Wir bedienen uns der dort benutzten Bezeichnungen.

Aus den Entwickelungen von Hertz²⁾ ergibt sich, dass den allgemeinen electrodynamischen Gleichungen³⁾ in dem Luftraum, welcher einen unendlich langen Kreiscylinder (einen Kupferdraht vom Radius a) umgibt, durch folgendes Werthsystem genügt wird:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} R = B \sin nt \cdot \sin mz \cdot \frac{1}{\varrho}, \quad P = B \cos nt \cdot \cos mz \cdot \frac{1}{\varrho}, \\ m = nA. \end{array} \right.$$

Die Zeichen haben folgende Bedeutung: A ist die Constante der Grundgleichungen; t die Zeit; die z -Axe fällt zusammen mit der Axe des Cylinders; ϱ ist ein zu z senkrechter Radiusvector. R ist die Grösse der electrischen Feldintensität, ihre Richtung ist in jedem Punkte die Richtung von ϱ , sie soll positiv gerechnet werden in der Richtung der wachsenden ϱ . P ist die magnetische Feldintensität; dieselbe verläuft senkrecht zu z und zu R , also in Kreisen um die z -Axe, und muss positiv gerechnet werden in dem Sinne, in welchem der Radius einer Rechtsschraube rotirt, während die Axe in der Richtung der wachsenden z vor-schreitet.

Die Gleichungen stellen eine stehende electromagnetische Welle dar, deren Wellenlänge (Abstand von Knoten zu Knoten) $\lambda = \pi/m$ und deren Schwingungsdauer (Dauer der „vibration simple“) $T = \pi/n$ ist, und welche entstanden gedacht werden kann aus zwei in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit $1/A$ an dem Cylinder entlanggleitenden Wellen. — Hertz zeigt, dass die angegebene Form der Welle — bei welcher die electrischen Kraftlinien die Drahtoberfläche senkrecht treffen — einerseits nothwendig mit diesem Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verknüpft ist; und dass sie andererseits für den Grenzfall eines „vollkommenen Leiters“ die einzige mögliche Kraftvertheilung bei jeder noch so hohen Schwingungszahl ist. — Wir wissen

1) Hertz, Wied. Ann. **36**. p. 1. 1889.

2) Hertz, l. c. p. 18 ff.

3) Hertz, l. c. p. 2.

nun aus den Untersuchungen von Sarasin und de la Rive¹⁾), dass electromagnetische Wellen der von uns benutzten Schwingzahlen sich an Kupferdrähten mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, wie im freien Luftraum, d. h. eben mit der Geschwindigkeit $1/A$. Wir sind also zu dem Schlusse berechtigt, dass für unsere Schwingungen erstens eine den Draht umgebende stehende Welle durch das Gleichungssystem (1) dargestellt wird, und dass zweitens für dieselben Schwingungen Kupfer bereits als ein „vollkommener“ Leiter zu betrachten ist. — Für Schwingungen von gleicher Periode hat endlich Hertz²⁾ experimentell bewiesen, dass sie in messbare Tiefen der Metallmasse nicht eindringen, — dass sie vielmehr die Drähte wie eine für sie undurchlässige Wand umspielen. Man ersieht am einfachsten mittelst der Poetting'schen Darstellung (s. unten p. 360 f.), in wie engem Zusammenhange diese Thatsache mit der von uns angenommenen Kräftevertheilung steht.

Diese letztere ist durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet: die electrische Intensität innerhalb einer jeden zu z senkrechten Ebene in jedem Moment dieselbe, als ob der Draht in seiner ganzen Ausdehnung mit ruhender Electricität von constanter Dichte geladen wäre (die aber für jede Ebene und für jede Zeit verschieden anzunehmen ist); — mit anderen Worten: sie leitet sich innerhalb jeder Schicht aus einem Potential φ ab, für das im Luftraum $\partial^2\varphi/\partial\varrho^2 + 1/\varrho \cdot \partial\varphi/\partial\varrho = 0$, und auf der Drahtoberfläche stehen die electrischen Kraftlinien senkrecht.

Entsprechend ist die Vertheilung der magnetischen Intensität in jeder zu z senkrechten Ebene und für jedes t dieselbe, als ob in dem Drahte ein constanter Strom i flösse, (dessen Intensität aber für jede Schicht und jede Zeit verschieden angenommen werden muss). — Die magnetischen Kraftlinien fallen zusammen mit den electrischen Aequipotentiallinien.

Aus dem Gesagten folgt, dass das electromagnetische Feld, gebildet durch ein System von Wellen, welche eine beliebige Anzahl paralleler Drähte umgeben, sich ohne wei-

1) Sarasin u. de la Rive, l. c. p. 557.

2) Hertz, Wied. Ann. 37. p. 395. 1889.

teres aus dem electrostatischen Feld ableitet, welches das-selbe System von Leitern umgibt.¹⁾ — Sind insbesondere, wie in den Versuchen, zwei parallele Drähte gegeben, deren entsprechende Punkte sich in jedem Momente in entgegen-gesetzter Phase befinden, so ist die electrische Intensität in jeder Schicht $z = \text{constans}$ identisch mit derjenigen electro-statischen, welche von entgegengesetzt gleichen und gleich-mässig vertheilten Ladungen auf den beiden Drähten her-rühren würde. Ist dann noch — wie es ebenfalls den Ver-suchen entsprach — der Radius der Drähte klein gegen ihren Abstand, so entsteht dieses Feld einfach durch Superposition derjenigen Felder, welche durch die beiden geladenen Leiter einzeln hervorgebracht wurden: die electrischen Kraftlinien werden von den Kreisen gebildet, welche (in Ebenen, die zu den Drahtachsen senkrecht) durch die Drahtachsen gehen, — die Aequipotentiallinien, und zugleich die magnetischen Kraftlinien, von dem System der Kreise, welche die senkrechten Trajectorien jener sind. — Die Werthe der electrischen und magnetischen Intensität, welche (R) und (P) heissen mögen, sind:

$$(1) \quad (R) = B \cdot \sin nt \cdot \sin mz \cdot \frac{b}{\varrho \varrho}, \quad (P) = B \cdot \cos nt \cdot \cos mz \cdot \frac{b}{\varrho \varrho},$$

wo ϱ' sich auf den zweiten Draht bezieht.²⁾

Die Electricitätsmenge auf der Länge dz ist:

$$(2) \quad de = 2\pi a \frac{R(a)}{4\pi} dz = \frac{B}{2} \sin nt \cdot \sin mz \cdot dz;$$

die Potentialdifferenz zwischen zwei gegenüberliegenden Punk-ten der beiden Drähte:

$$(3) \quad \Phi = 2 \int_a^b R \cdot d\varrho = 2 B \cdot \log \frac{b}{a} \cdot \sin nt \cdot \sin mz;$$

die Capacität der Längeneinheit:

$$(4) \quad \alpha = \frac{de}{dz} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{4 \log \frac{b}{a}}.$$

1) Dieselben statisch-dynamischen Analogien hat, von anderen Grund-lagen aus, Stefan entwickelt; Wied. Ann. 41. p. 400. 1890.

2) Eine Zeichnung dieses Feldes, welche — in der bekannten Sym-bolik — zugleich die Grösse der Intensität darstellt, findet sich bei Mass-cart et Joubert, Électr. et Magnét. 1. § 136.

Ferner ist die Stromstärke i an der Stelle z :

$$(5) \quad i = 2\pi a \cdot \frac{P(a)}{4\pi} = \frac{B}{2} \cos nt \cdot \cos mz$$

Die electrische und magnetische Energie des Raumes τ , welcher durch zwei unendliche Ebenen: $z=0$ und $z=z$ begrenzt wird, drückt sich einerseits aus:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{-z}^z (R)^2 \cdot d\tau = \frac{1}{8\pi} \int_0^z B^2 \sin^2 nt \cdot \sin^2 mz \cdot dz \cdot J, \\ W_m = \frac{1}{8\pi} \int_{-z}^z (P)^2 \cdot d\tau = \frac{1}{8\pi} \int_0^z B^2 \cos^2 nt \cdot \cos^2 mz \cdot dz \cdot J, \\ \text{wo } J = \int_{\varrho'=\alpha b}^{\infty} \frac{b^2}{\varrho^2 \varrho'^2} d\varrho \end{array} \right.$$

und do ein Element einer zu z senkrechten Ebene ist.

Andererseits ist:

$$(7) \quad dW_e = \frac{1}{2} \Phi^2 \cdot \alpha \cdot dz.$$

Durch Vergleichung folgt:

$$(8) \quad J = 4\pi \log \frac{b}{a},$$

und weiter unter Benutzung von (6), (5) und (8):

$$(9) \quad dW_m = \frac{1}{2} i^2 \cdot q \cdot dz, \quad \text{wo } q = 4 \log \frac{b}{a} = \frac{1}{\alpha}.$$

q kann als Selbstinductionscoefficient der Längeneinheit des Doppeldrahtes bezeichnet werden. Wäre i längs dem ganzen Drahtsystem, von der Länge z , constant, so wäre $z \cdot q = z \cdot 4 \log(b/a)$ der Selbstinductionscoefficient der Strombahn; — und thatsächlich erhält man diesen Werth, wenn man in Maxwell's Formel¹⁾ den Strom in einer unendlich dünnen Oberflächenschicht concentrirt annimmt.

Die Gleichungen (6) ergeben, ausgeführt:

$$(6') \quad \left\{ \begin{array}{l} W_e = \frac{B^2}{4} \log \frac{b}{a} \cdot \sin^2 nt \cdot \left[z - \frac{\sin 2mz}{2m} \right], \\ W_m = \frac{B^2}{4} \log \frac{b}{a} \cdot \cos^2 nt \cdot \left[z + \frac{\sin 2mz}{2m} \right], \\ W = W_e + W_m = \frac{B^2}{4} \log \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin 2mz}{m} \cdot \cos^2 nt + \text{constans}, \end{array} \right.$$

wo constans unabhängig von t .

1) Maxwell, Treatise 2. § 685. 1873.

Das anschaulichste Bild von den Vorgängen im electro-magnetischen Felde gewinnen wir, indem wir mit Poynting die Wanderung der Energie betrachten. Wir erhalten¹⁾ die Änderung der Energievertheilung, indem wir ausdrücken, dass in der zu (R) und (P) senkrechten Richtung durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit die Energiemenge:

$$\frac{1}{4\pi A} \cdot (R) \cdot (P) \sin [(R), (P)]$$

strömt in dem Sinne, in welchem die Axe einer Rechtsschraube vorschreitet, wenn ihr Radius aus der Richtung von (R) in die Richtung von (P) gedreht wird. Folglich strömt in unserem Falle durch eine zu z senkrechte Ebene in der Richtung der wachsenden z in dt der Energiebetrag:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} dE = \frac{B^2}{4\pi A} \cdot \sin nt \cdot \cos nt \cdot \sin mz \cdot \cos mz \cdot J \cdot dt \\ = \frac{1}{A} \cdot B^2 \log \frac{b}{a} \cdot \sin nt \cdot \cos nt \cdot \sin mz \cdot \cos mz \cdot dt. \end{array} \right.$$

Führen wir die Wellenlänge $\lambda = \pi/m$ ein, so zeigt sich, dass die Bewegung der Energie verschwindet in Ebenen, deren konstanter Abstand $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Die Welle zerfällt in zwei gleiche Intervalle; in jedem derselben wogt die Energie zwischen den Grenzflächen hin und her, — zwischen beiden aber findet kein Austausch statt.

Unter Benutzung von (3) und (5) kann man der Gl. (10) ferner die Form geben:

$$(10') \quad dE = \frac{1}{A} \Phi \cdot i \cdot dt.$$

Denken wir uns in einem Knoten z_0 der electrischen Intensität die parallelen Drähte durch einen Querdraht verbunden und nun das System von dem constanten Strom i durchflossen, so wäre (wenn in der Strecke z bis z_0 sich keine electromotorischen Flächen befinden) $1/A \cdot \Phi \cdot i \cdot dt$ — das Product aus Potentialdifferenz der Enden und Electricitätsmenge — die Energie, welche dem Abschnitt zwischen z und z_0 in der Zeit dt zugeführt und dort in Wärme verwandelt wird. Poynting hat bereits gezeigt, dass und wie man die Wege dieser Energie im umgebenden Dielectricum findet, und dass der Draht dabei einzig

1) s. Poynting, Phil. Trans. f. 1884; II. p. 343.

die Function hat, die Energie als electromagnetische zu vernichten. — Auch in unserem Falle führt die Poynting'sche Auffassung zu dem gleichen einfachen Resultat: in den Abschnitt z bis z_0 wandert die Energie $\Phi/A \cdot idt$ ein. Sie bewegt sich hier aber nicht senkrecht gegen den Draht, sondern gleitet an demselben hin, — und sie wird folglich nicht absorbirt, sondern pendelt mit unveränderlicher Stärke zwischen zwei Grenzlagen.

2. Betrachten wir ferner den Luftraum zwischen zwei parallelen, kreisförmigen Metallplatten, die im Abstand ϵ einander gegenüberstehen. Die Mittelnormale der beiden Platten werde zur x -Axe gewählt, ein Radius vector senkrecht zu x mit r bezeichnet. Dann genügt in dem cylindrischen Zwischenraum, — abgesehen von der Randzone, — das folgende System den allgemeinen Grundgleichungen und zugleich der Bedingung, dass die electrischen Kraftlinien senkrecht auf den Metalloberflächen enden:

$$(11) \quad X = B_1 \sin nt \cdot f(r), \quad P = - \frac{B_1}{m} \cos nt \cdot \frac{\partial f(r)}{\partial r}, \quad m = nA,$$

wenn $f(r)$ die Gleichung befriedigt:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + m^2 f = 0$$

und für $r = 0$ endlich bleibt. $f(r)$ ist demnach die Bessel'sche Function $J_0(mr)$, d. h.:

$$(11) \quad f(r) = 1 - \frac{(mr)^2}{2 \cdot 2} + \frac{(mr)^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} - + \text{infin.}$$

X ist die electrische Intensität; sie ist senkrecht zu den Platten gerichtet. P ist die magnetische Intensität; sie verläuft in zu x senkrechten Ebenen und in Kreislinien um die Axe. Sie ist positiv zu zählen in dem Sinne, in welchem der Radius einer Rechtsschraube rotirt, wenn ihre Axe nach $+x$ vorschreitet.

Daraus folgt für den Raum innerhalb der Cylinderfläche $r = r$ die electrische Energie:

$$(12) \quad W'_e = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int_0^r 2\pi r \cdot X(r)^2 \cdot dr = \frac{B_1^2}{8} \epsilon r^2 \cdot \sin^2 nt \left[1 - \frac{(mr)^2}{4} + \frac{(mr)^4}{32} - + \dots \right]$$

oder (12') $W'_e = \frac{1}{2} c \cdot U(0)^2,$

wenn die electromotorische Kraft zwischen zwei gegenüberstehenden Punkten der Kreisscheiben:

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 \varepsilon \cdot \sin nt \cdot f(r) = U(r) \\ \text{und } \frac{r^2}{4\varepsilon} \left[1 - \frac{(mr)^2}{4} + \frac{(mr)^4}{32} - + \dots \right] = c \end{array} \right.$$

gesetzt wird. — Die magnetische Energie desselben Raumes ist:

$$(13) \quad W'_m = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \int_0^r \varepsilon \cdot 2\pi r \cdot P(r)^2 \cdot dr = \frac{B_1^2}{8} \varepsilon r^2 \cdot \cos^2 nt \cdot \left[\frac{(mr)^2}{8} - \frac{(mr)^4}{48} + \dots \right].$$

Wir erhalten hieraus die Formeln der Statik, indem wir $mr (= \pi r/\lambda) = 0$ setzen. Dann wird X unabhängig von r ; $U(r) = U(0)$ die Potentialdifferenz zwischen den Platten, c die electrostatische Capacität; P und W_m werden gleich Null. Praktisch ist dieser Grenzfall erreicht, sobald für die Messungen $(mr)^2/4$ eine gegen 1 verschwindende Grösse ist. Diese Bedingung war in allen Versuchsreihen erfüllt, da im ungünstigsten Fall dieser Werth nur $1/144$ betrug.

3. Denken wir nun beide Systeme, — die Paralleldrähte unter 1. und den Condensator unter 2. — in metallische Verbindung und in diejenige gegenseitige Lage gebracht, die der Versuchsanordnung (Fig. 1) entspricht. Die z Coordinaten längs den Paralleldrähten sollen gegen den Condensator hin wachsen, und die positive x Richtung im Condensator soll von der Platte ausgehen, welche mit dem ersten Draht (auf welchen sich die Gleichungen (1) beziehen) verbunden ist, und welche die erste Platte heissen mag.

Wir wollen, um den Fall der Rechnung zugänglich zu machen, erstens voraussetzen, dass sich beide Systeme gegenseitig nicht beeinflussen, dass das electromagnetische Feld eines jeden dasselbe ist, als wenn das andere nicht vorhanden wäre; — und wir wollen zweitens bez. der Paralleldrähte annehmen, dass die Kräfte auch an den Enden der Drähte in derselben Weise vertheilt sind, wie in den mittleren Regionen. Bezüglich des Condensatorgebietes werden wir die entsprechende Annahme nicht machen dürfen, wissen wir doch aus der Electrostatik, wie beträchtlich die Randcorrectionen und der Einfluss der äusseren Seiten

der Platten für Condensatoren von den Dimensionen der unsrigen ausfallen. — Eine Berechnung dieser Correctionen aus den Grundgleichungen der Electrodynamik erscheint kaum möglich. Nachdem wir aber gesehen haben, dass die Capacität des inneren Gebietes unseres Plattencondensators, nach diesen Gleichungen berechnet, sich nur um einen unmessbaren Betrag von der electrostatischen Capacität unterscheidet, werden wir wenigstens versuchweise die gleiche Annahme für den ganzen Condensator machen, und somit die nach statischen Methoden gemessene Capacität als genäherten Werth der für uns in Betracht kommenden ansehen dürfen.

Unter diesen vereinfachenden Annahmen können wir die folgenden beiden Bedingungen analytisch formuliren:

a) die electromagnetische Energie des gesammten Systems ist unveränderlich,

b) die electromotorische Kraft von dem Endpunkt des ersten zu dem des zweiten Paralleldrahtes ist identisch mit der (praktisch von r unabhängigen) electromotorischen Kraft von der ersten Condensatorplatte zur zweiten.

In den Gleichungen unter 1. ist z der Abstand eines beliebigen Drahtpunktes von einem Punkt, in welchem die electrische Intensität verschwindet, d. h. von einem Knotenpunkt. Lassen wir z jetzt die Coordinate des Endpunktes t bedeuten, so ergibt die Bedingung (a): $\Sigma W = \text{const}$, nach (6'), (12'), (13) unter Vernachlässigung aller Glieder von der Ordnung $(mr/2)^2$:

$$(a) \quad \frac{B^2}{4} \log \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin 2mz}{m} = \frac{1}{2} B_1^2 \cdot c \epsilon^2; \quad 1)$$

und die Bedingung (b): $\Phi(z) = U$ nach (3) und (12'):

$$(b) \quad 2B \log \frac{b}{a} \cdot \sin mz = B_1 \cdot \epsilon.$$

Die Combination beider Gleichungen ergibt:

1) Zu derselben Gleichung (a) kann man auch gelangen, indem man wie für die Paralleldrähte, so auch für das Condensatorgebiet, die Poyn-ing'sche Gleichung aufstellt, und dann ausdrückt, dass es dieselbe Energie ist, welche aus jenem Gebiet auswandert und welche in dieses einwandert.

$$\frac{1}{m \cdot \operatorname{tg} mz} = c \cdot 4 \log \frac{b}{a},$$

oder unter Einführung der Wellenlänge $\lambda = \pi/m$:

$$(14) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi c q},$$

worin $q = 4 \log (b/a)$ den Selbstinduktionscoefficienten der Längeneinheit der Paralleldrähte bedeutet.

An diese Gleichung knüpfen wir noch folgende Bemerkungen: es sei in einem gegebenen Stromkreis, — den wir uns bei $z = 0$ durch eine Brücke vervollständigt denken, — z klein gegen qc ; dann wird nach (14) πz auch klein gegen λ , und wir können die Tangente durch den Bogen ersetzen. Dadurch geht (14) über in:

$$(14') \quad \lambda^2 = \pi^2 \cdot qz \cdot c \quad \text{oder vermöge} \quad \frac{\lambda}{T} = \frac{n}{m} = \frac{1}{A};$$

$$T = \pi A \sqrt{qz \cdot c}.$$

Dies ist aber nichts anderes, als die Thomson'sche Formel, da $qz = p$ der Selbstinduktionscoefficient des ganzen Stromkreises ist. — Auch entspricht der Ansatz (a) (b), mittelst dessen wir zu der Gleichung (14) gelangt sind, durchaus demjenigen, aus welchem man die Gleichung (14') erhält. — Setzt man nämlich in unseren Gleichungen $\pi z/\lambda = mz$ verschwindend klein und $qz = p$, so wird:

nach (5): $i = (B/2) \cos nt$ (unabhängig von z);

nach (6'): $W = W_m = \frac{1}{2} pi^2$ (die Energie des Schliessungskreises ist rein magnetisch),

nach (12') und (13): $W' = W'_e = \frac{1}{2} c U^2$ (die Energie des Condensators ist rein electricisch);

nach (3) und (5): $\Phi = -A \cdot p (\partial i / \partial t)$ (inducirte electromotorische Kraft).

Also wird der Ansatz:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} pi^2 + \frac{1}{2} c U^2 \right) = 0, \quad (b) \quad -Ap \frac{\partial i}{\partial t} = U.$$

Die Verbindung von (a) und (b) ergibt:

$$(c) \quad i = Ac \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Die Gleichungen (a) und (c) sind aber diejenigen, welche den Ansatz für die Thomson'sche Formel bilden¹⁾ (bei

1) s. Thomson, Math. and phys. papers, I. p. 540.

Vernachlässigung der Joule'schen Wärme), und welche für U und i Schwingungen von der Periode T ergeben.

Der soeben besprochene Grenzfall entspricht bei gegebenem Schliessungskreis einem sehr grossen Werth der Endkapacität c . Setzen wir dieselbe umgekehrt verschwindend klein, so nähern wir uns der experimentellen Anordnung, bei welcher die Paralleldrähte frei endigen. Die allgemeine Gleichung (14) gibt für diesen Grenzfall:

$$(14'') \quad z = \frac{\lambda}{2},$$

d. h. am freien Ende liegt ein Schwingungsbauch. Diese Behauptung bestätigen alle Beobachtungen mit der gleichen Annäherung wie in dem akustisch entsprechenden Fall der offenen Pfeife, und der Grund der vorhandenen kleinen Abweichung ist offenbar der gleiche, wie dort.

Discussion der Beobachtungen.

Die allgemeine Gleichung (14) ist nun mit den Beobachtungen zu vergleichen. Wenden wir uns zunächst zu den Versuchen mit kleinerem Abstand der Paralleldrähte (Tab. I—III). Tab. I, für welche $c = \infty$ und folglich $z = 0$ ist, gibt die Lage des Endpunktes t direct. Die Zahlen der Tabelle scheinen anzudeuten, dass der Werth von t ein wenig steigt mit abnehmender Wellenlänge. Dies ist, wie oben schon angedeutet, keineswegs a priori ausgeschlossen. Indess liegen die Abweichungen an der Grenze des Messbaren, — um so mehr, als die erste Zahl (für $n = 2$) aus nur zwei Beobachtungen extrapoliert und daher mit dem $\sqrt{5}$ -fachen Fehler einer Einzelmessung behaftet ist. Sehen wir also von dieser möglichen Veränderlichkeit ab, und nehmen wir den Mittelwerth $t = 1075,5$ als den wahrscheinlichsten Werth für alle λ . Die Gleichungen, denen die Zahlen der folgenden Tabellen II und III genügen sollen, enthalten zwei Constanten: t (im Werth von $z_n = t - k_n n$) und c . Für die letztere Grösse ist nur ein angenäherter Werth aus den electrostatischen Messungen bekannt. Stellt man die Forderung, dass das Mittel der t -Werthe in jeder Tabelle mit demjenigen der Tabelle I (1075,5) zusammenfallen soll, so ist die zweite Constante c dadurch bestimmt. Man erhält für

$\varepsilon = 0,5 : c = 49$, und für $\varepsilon = 2 : c = 15,7$, und mittelst dieser Constanten die in die Tab. II und in die vorderen Spalten von Tab. III eingetragenen z - und t -Werthe. Die t der Tab. II zeigen gute Uebereinstimmung. In Tab. III finden sich jedoch Abweichungen, die durch Beobachtungsfehler nicht erklärt werden können. Man erhält hier eine genügende Constanze nur durch Werthe von c , die sehr nahe (d. h. mit einem Spielraume von höchstens $\pm 0,2$) bei 16,3 liegen; vgl. die letzten Spalten von Tab. III. Das Mittel der t -Werthe wird dann 1073,1 statt 1075,5; man wird aber diese Differenz nicht befremdlich finden, da durch das Auseinanderziehen der Condensatorplatten der Stromkreis entsprechend deformirt ist.

Die Beobachtungen bei dem grösseren Abstande der Paralleldrähte — Tab. IV und V — besitzen nicht die Genauigkeit der bisher besprochenen; die kleinen regelmässigen Abweichungen sowohl innerhalb der einzelnen Reihen, wie der verschiedenen Reihen gegen einander, verschwinden, sofern sie vorhanden sind, unter den zufälligen Fehlern. Es entspricht dem Genauigkeitsgrad dieser Beobachtungen, wenn wir fordern, dass jede der drei Beobachtungsreihen, welche je mit demselben Condensator und folglich bei merklich constanter Form des Stromkreises ausgeführt sind, im Mittel zu demselben Werth von t führe, und dass jede Reihe in sich möglichst gut übereinstimme. Diese Bedingungen führen zu den Mittelwerthen $t = 1089$ für den grossen und $t = 1085$ für den kleinen Condensator, und zu den Werthen der c und t , welche in die Tabellen IV und V eingetragen sind. Man findet in den Werthen der einzelnen Reihen keine systematischen Abweichungen, — und auch die Ueber-einstimmung der einzelnen Zahlen mit dem der ganzen Gruppe gemeinsamen Mittelwerth erscheint nach Maassgabe der Beobachtungsfehler befriedigend. Die grössste Abweichung beträgt in der ersten Gruppe 5 cm, in der zweiten 4 cm. Es muss aber der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung im Durchschnitt auf ca. 3 cm geschätzt werden; und dieser Fehler überträgt sich, je nach der Zahl der Beobachtungen für ein bestimmtes λ mit seinem 1 bis $\sqrt{5}$ -fachen Betrage auf den extrapolierten Werth von t .¹⁾

1) Zu bemerken ist freilich, dass eine ganze Beobachtungsreihe, deren

Die Werthe c , welche zur Darstellung der Beobachtungen gedient haben, finden sich in Tab. VI¹⁾ vereinigt. Für zwei Condensatoren ($r = 10$, $\epsilon = 0,5$ und 2) sind Beobachtungsreihen bei verschiedener Form des Schliessungskreises gemacht; die zusammengehörenden Werthe der c sind in guter Uebereinstimmung. — Es sind ferner in Tab. VI diesen c -Werthen die electrostatisch gemessenen gegenübergestellt. Die letzteren sind durchweg grösser als jene. Wir sind aber der Ansicht, dass diese Differenz im wesentlichen nicht durch einen wirklichen Unterschied zwischen der electrostatischen Capacität und der für unsere schnellen Schwingungen in Betracht kommenden Grösse hervorgebracht ist, sondern vielmehr sich aus einer Verschiedenheit der Versuchsbedingungen erklärt. Die Steinconsole, auf welcher der Condensator ruhte, scheint den schnellen Schwingungen gegenüber die Rolle eines Isolators zu behaupten, gegenüber den electrostatischen Kräften aber war dies offenbar nicht der Fall. Durch unsere Beobachtungen²⁾ wurden nämlich getrennt die electricalen Kraftlinien, welche von Platte zu Platte gehen, und diejenigen, welche von der Platte in den Raum hinausgesandt werden, bestimmt. Der Betrag der letzteren nun war stets beträchtlich grösser, als er hätte sein dürfen, wenn in der Nähe der Platten keine mit der Erde verbundenen Leiter sich befunden hätten. Die aus den electrostatischen Messungen berechneten c sind deshalb zu gross ausgefallen.

Andererseits liegt in der Kirchhoff'schen Entwicklung neben der Voraussetzung, dass sich keine fremden Leiter in endlicher Entfernung befinden, auch noch die, dass von der Innenseite der Condensatorplatten keine Kraftlinien in den Raum hinausgehen. Dies trifft zu, sobald ϵ gegen r verschwindet, es trifft aber offenbar nicht mehr zu für unsere Condensatoren, — und die Kirchhoff'sche Formel musste demnach für dieselben zu kleine Werthe liefern. Diesen Ueberlegungen entsprechen im allgemeinen die Zahlenreihen

ϵ -Zahlen, aus unaufgeklärten Ursachen, aus dem Bereich der übrigen völlig herausfielen, verworfen wurde.

1) s. oben p. 12.

2) s. oben p. 12 f.

der Tab. VI. Es ist freilich nicht zu erkennen, dass die ersten der „aus Schwingungen bestimmten“ c (49,48) zu klein ausfallen sind. Diese Werthe sind aber aus durchweg sehr kleinen Strecken z berechnet; hier musste der zwischen die Paralleldrähte hineinragende Condensator wesentliche Störungen hervorrufen.

A n h a n g.

Stellt man für jede der zwei grossen Gruppen, welche je derselben Anordnung der Paralleldrähte und des primären Endes entsprechen, die ersten, dem primären Ende zunächst gelegenen Knotenpunkte k_n^0 als Function der Wellenlängen λ_n graphisch dar, so zeigt sich, dass dieselben sich einer gleichmässig verlaufenden Curve einfügen, deren Charakter dem der Curven $k_n^0 = f(\lambda_n)$ ähnlich erscheint. Die Ausrechnung ergibt, dass sich die Länge z' des ersten Intervalls wenigstens mit leidlicher Annäherung unter der Form (14):

$$\operatorname{tg} \frac{\pi z'}{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi c' q}$$

darstellen lässt. Dabei erhält man für die in z' enthaltene Constante und für c' Werthe, welche mit der Form des ersten Intervalls verträglich erscheinen, wenn man den primären (die Funkenstrecke enthaltenden) Leiter in dieses Intervall einbegreift, und unter c' die Gesammtcapacität der zwei hinter einander geschalteten Condensatoren versteht, welche durch die Plattenpaare $u v$ und $u' v'$ (Fig. 1), gebildet werden. D. h.: die Dinge verhalten sich in erster Annäherung so, als wenn die Polkugeln des Inductoriums durch ein kurzes Leiterstück, statt durch den Funken verbunden wären. Dies wird erklärlich, wenn man annehmen darf, dass die Energie der primären Schwingung sich im Funken sehr schnell erschöpft, dass diese Schwingung sehr stark gedämpft ist. Sie wird dann nur einen ersten Anstoss geben für die Schwingungen des ganzen Systems von Leitern: (primärer Leiter + secundärer Kreis) = (Condensator c' am Anfang + Paralleldrähte + Condensator c am Ende), welche dasselbe dann, wenig beeinflusst durch den Ablauf der primären Schwingung, mit der ihm eigenthümlichen Periode vollführt.) Diese

Auffassung wird bestätigt durch die Beobachtung, dass die Lage der Knoten sich kaum merklich ändert, wenn man die Platten der primären Schwingung auf ihren Stangen gegeneinander schiebt, während sie mit den secundären Platten starr verbunden bleiben, — sehr stark dagegen, sobald man die relative Lage des primären und des secundären Plattenpaars ändert. Im ersten Fall wird die primäre Schwingung wesentlich, der gesammte Stromkreis aber wenig beeinflusst, im zweiten Fall ändert man den Condensator c' .

Dass man eine starke Dämpfung der primären Schwingung annehmen muss, hat bereits Hertz in seiner ersten Abhandlung betont, und zugleich darauf hingewiesen, dass der primären Schwingung keine scharf sich geltend machende Periode zukommt.¹⁾ In Uebereinstimmung hiermit haben Sarasin und de la Rive²⁾ experimentell nachgewiesen, dass die Wellenlänge der Schwingungen, die ein Hertz'scher Resonator anzeigt, lediglich durch diesen letzteren, nicht aber durch die primäre Schwingung bestimmt wird. — Gleicht nach Hertz die primäre Schwingung dem Klang eines mit dem Hammer angeschlagenen Holzstabes, so verhält sich der Hertz'sche Drahtkreis wie die schwach gedämpfte, in der Tonhöhe unnachgiebige Stimmgabel.

Wir haben einige Beobachtungen gemacht, welche das Gesagte bestätigen und zugleich die Grenze zeigen, innerhalb deren es gilt: Rubens³⁾ hat mittelst einer exacten Methode bewiesen, dass, wenn man die Lecher'sche Brücke auf einen Knoten legt, jenseits derselben nahezu eine einfache Sinusschwingung besteht. Wir untersuchten nun die Region hinter der Brücke mit einem Hertz'schen Resonator. Wir hatten uns ver erzeugt, dass derselbe aus dem die Paralleldrähte gebenden Wellenzuge unter den verschiedensten Bedingungen stets eine Wellenlänge von ca. 186 cm heraus hob. Legten wir nun die Lecher'sche Brücke auf den Knoten der verschiedenen dem *Paralleldrahtsystem* eigenthüm-

1) Hertz, Wied. Ann. 31. p. 443 u. 446. 1887.

2) Sarasin u. de la Rive, Arch. des sc. phys. et nat. (3) 23. p. 113 u. 557. 1890.

3) Rubens, Wied. Ann. 42. p. 154. 1891.

der Tab. VI. Es ist freilich nicht zu erkennen, dass die ersten der „aus Schwingungen bestimmten“ c (49,48) zu klein aus gefallen sind. Diese Werthe sind aber aus durchweg sehr kleinen Strecken z berechnet; hier musste der zwischen die Paralleldrähte hineinragende Condensator wesentliche Störungen hervorrufen.

A n h a n g.

Stellt man für jede der zwei grossen Gruppen, welche je derselben Anordnung der Paralleldrähte und des primären Endes entsprechen, die ersten, dem primären Ende zunächst gelegenen Knotenpunkte k_n^0 als Function der Wellenlängen λ_n graphisch dar, so zeigt sich, dass dieselben sich einer gleichmässig verlaufenden Curve einfügen, deren Charakter dem der Curven $k_n^* = f(\lambda_n)$ ähnlich erscheint. Die Ausrechnung ergibt, dass sich die Länge z' des ersten Intervalls wenigstens mit leidlicher Annäherung unter der Form (14):

$$\operatorname{tg} \frac{\pi z'}{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi c q}$$

darstellen lässt. Dabei erhält man für die in z' enthaltene Constante und für c' Werthe, welche mit der Form des ersten Intervalls verträglich erscheinen, wenn man den primären (die Funkenstrecke enthaltenden) Leiter in dieses Intervall einbegreift, und unter c' die Gesammtcapacität der zwei hinter einander geschalteten Condensatoren versteht, welche durch die Plattenpaare $u v$ und $u' v'$ (Fig. 1), gebildet werden. D. h.: die Dinge verhalten sich in erster Annäherung so, als wenn die Polkugeln des Inductoriums durch ein kurzes Leiterstück, statt durch den Funken verbunden wären. Dies wird erklärlich, wenn man annehmen darf, dass die Energie der primären Schwingung sich im Funken sehr schnell erschöpft, dass diese Schwingung sehr stark gedämpft ist. Sie wird dann nur einen ersten Anstoss geben für die Schwingungen des ganzen Systems von Leitern: (primärer Leiter + secundärer Kreis) = (Condensator c' am Anfang + Paralleldrähte + Condensator c am Ende), welche dasselbe dann, wenig beeinflusst durch den Ablauf der primären Schwingung, mit der ihm eigenthümlichen Periode vollführt. Diese

Auffassung wird bestätigt durch die Beobachtung, dass die Lage der Knoten sich kaum merklich ändert, wenn man die Platten der primären Schwingung auf ihren Stangen gegeneinander schiebt, während sie mit den secundären Platten starr verbunden bleiben, — sehr stark dagegen, sobald man die relative Lage des primären und des secundären Plattenpaars ändert. Im ersten Fall wird die primäre Schwingung wesentlich, der gesamme Stromkreis aber wenig beeinflusst, im zweiten Fall ändert man den Condensator c' .

Dass man eine starke Dämpfung der primären Schwingung annehmen muss, hat bereits Hertz in seiner ersten Abhandlung betont, und zugleich darauf hingewiesen, dass der primären Schwingung keine scharf sich geltend machende Periode zukommt.¹⁾ In Uebereinstimmung hiermit haben Sarasin und de la Rive²⁾ experimentell nachgewiesen, dass die Wellenlänge der Schwingungen, die ein Hertz'scher Resonator anzeigt, lediglich durch diesen letzteren, nicht aber durch die primäre Schwingung bestimmt wird. — Gleicht nach Hertz die primäre Schwingung dem Klang eines mit dem Hammer angeschlagenen Holzstabes, so verhält sich der Hertz'sche Drahtkreis wie die schwach gedämpfte, in der Tonhöhe unnachgiebige Stimmgabel.

Wir haben einige Beobachtungen gemacht, welche das Gesagte bestätigen und zugleich die Grenze zeigen, innerhalb deren es gilt: Rubens³⁾ hat mittelst einer exacten Methode bewiesen, dass, wenn man die Lecher'sche Brücke auf einen Knoten legt, jenseits derselben nahezu eine einfache Sinusschwingung besteht. Wir untersuchten nun die Region hinter der Brücke mit einem Hertz'schen Resonator. Wir hatten uns vorher überzeugt, dass derselbe aus dem die Paralleldrähte umgebenden Wellenzuge unter den verschiedensten Bedingungen stets eine Wellenlänge von ca. 186 cm heraus hob. Legten wir nun die Lecher'sche Brücke auf den Knoten der verschiedenen *dem Paralleldrahtsystem eigenthüm-*

1) Hertz, Wied. Ann. 31. p. 443 u. 446. 1887.

2) Sarasin u. de la Rive, Arch. des sc. phys. et nat. (3) 23. p. 113 u. 557. 1890.

3) Rubens, Wied. Ann. 42. p. 154. 1891.

lichen Schwingungen, so wie der Resonator hinter der Brücke die im Folgenden angegebenen Wellenlängen auf.

Tabelle VII.

Keine Brücke	$\lambda_b = 881$ $= 5 \times 176$	$\lambda_b = 364$ $= 2 \times 182$	$\lambda_b = 192$
190	176	179	190
184	173	189	191
187	187	187	190
185	—	185	—
$\lambda_r = 186$	178	186	190

In Tab. VII gibt die erste Spalte die „natürliche“ Wellenlänge für den Resonator, die folgenden die „erzwungenen“; in diesen letzteren Spalten bedeutet λ_b die Wellenlänge des Paralleldrahtsystems. Darunter stehen die einzelnen mit dem Resonator gemessenen Wellenlängen, in der letzten Zeile als λ_r die wahrscheinlichsten Werthe der letzteren Grösse. Man sieht deutlich, dass der Resonator der erregenden Schwingung etwas nachgibt. Dem Versuch, ihm eine grössere Abweichung von seiner Eigenschwingung aufzuzwingen, widerstand er: Als durch die Brücke ein Wellenzug von $\lambda_b = 165$ cm abgegrenzt wurde, gab der Resonator keine scharfen Intensitätsminima mehr.

Strassburg i. E., im März 1891.

VIII. Zur Theorie der electrischen Schwingungen; von Franz Koláček.

Der Nachweis des Satzes, dass electrische Wellen im Luftraume mit Lichtgeschwindigkeit fortschreiten, erfordert neben der Kenntniss der Wellenlänge, einer dank den bahnbrechenden Versuchen von Hertz gegenwärtig direct messbaren Grösse, noch die Kenntniss der Schwingungsdauer. Letztere berechnet man mit einer Formel, deren Herleitung in der gerade entgegengesetzten Annahme, jener der Fernkräfte wurzelt. Es bleibt fraglich — auch Hertz hat dies hervorgehoben, ob, und wie weit die für Flaschenoscillationen noch zulässige Formel für die gebräuchlichen Vibratoren gültig bleibt. Aber auch hiervon abgesehen, wird die Anwendung der Formel illusorisch, wenn man mit ihr die Periode eines gestreckten Vibrators ohne Endcapacitäten berechnen will. Solche kommen bei den berühmten Hohlspiegelexperimenten und auch als secundäre Receptoren in Verwendung. In diesem Aufsatze wird die Theorie eines solchen Vibrators, dessen Materie unendlich gut leitet, direct aus den Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet. Die Oscillationen sind unter der gegebenen Voraussetzung rein periodisch, eine wesentliche Vereinfachung der Aufgabe.

I. Im Folgenden bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z, u, v, w$ die Componenten der magnetischen und electrischen Kräfte, sowie jene der Leitungsströme, die letzteren zwei Gruppen electrostatisch gemessen; $V = 3 \cdot 10^{10}$ ist die Weber'sche Zahl, λ die electrostatisch gemessene Leitfähigkeit der Vibratormaterie. Es bestehe Symmetrie um die z -Axe, sonach seien die Vibratoren Umdrehungskörper; $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ist der Werth der electrischen Kraft senkrecht zur Axe in einem Raumpunkte z , $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Der Continuitätsgleichung $\partial X/\partial x + \partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z = 0$ genügt die Annahme:

$$(0) \quad Z \cdot \varrho = \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \quad R \cdot \varrho = - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Die Substitution in die Maxwell'schen Gleichungen $\partial^2 X / \partial t^2 = V^2 \Delta X$, resp. $4\pi\lambda \partial X / \partial t = V^2 \Delta X$ ergibt:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{V^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} & \text{(für Luft),} \\ \frac{4\pi\lambda}{V^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} & \text{(Metall).} \end{cases}$$

Aus den Definitionsgleichungen der magnetischen Kraft $\partial \alpha / \partial t = V(\partial Z / \partial y - \partial Y / \partial z)$ etc. ergibt sich für den Grössenwert der in Kreisen um die Axe verlaufenden magnetischen Gesamtkraft der Werth $\partial \psi / \partial t \cdot 1/\rho V$ resp. $\psi \cdot 4\pi\lambda / \rho V$. Der erstere gilt für Luft, der zweite für das Metall. Es hat also ψ eine leicht auszusprechende physikalische Bedeutung.

Die Gleichungen (0) enthalten die Regel für ein einfaches Verfahren, den Werth der electrischen Kraftkomponente K zu finden, die in eine bestimmte Richtung s fällt. Es sei s' eine hierzu senkrechte Richtung, linkerhand gelegen, wenn man längs s vorwärtsblickt. Dann ist $K = +1/\rho \cdot \partial \psi / \partial s'$.

Die Bedingungen, denen ψ noch genügen muss, ergeben sich aus der Forderung, dass die Tangentialkomponenten der electrischen und magnetischen Kräfte continuirlich durch Grenzflächen hindurchgehen. In unserem Falle gilt für die Leiteroberfläche $(\partial \psi / \partial t)_e = 4\pi\lambda \psi_i$ und $(\partial \psi / \partial n)_e = (\partial \psi / \partial n)_i$. Der Index e bezieht sich auf Luft, i auf das Metall.

Es ist noch zu untersuchen, welche Bedingungen ausreichend sind, damit die Lösung für ψ eindeutig sei. Nach einem von Poynting herrührenden Satze bestimmt sich der in der Zeiteinheit erfolgende Zuwachs der Gesamtenergie, den ein bestimmter Raum durch eine ihn begrenzende Fläche empfängt, durch ein Flächenintegral folgender Eigenschaft: „Der durch jedes einzelne Flächenelement eintretende Betrag ist gleich dem Producte aus den in die Oberfläche fallenden Componenten der electrischen und magnetischen Kräfte, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, den sie miteinander bilden, und dividirt durch $4\pi V$.“¹⁾

Dieser Winkel ist in unserem Falle, wo die Grenzflächen Rotationsflächen sind, ein rechter, da die magnetische Kraft

1) Hertz, Wied. Ann. 36. p. 3. 1889.

in Parallelkreisen, die electrische in der Meridianebene verläuft. Der Zuwachs der Energie E in der Zeiteinheit ist dann eine mit dem Flächenintegrale:

$$\int d\omega \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot \frac{1}{\varrho^2}$$

proportionale Grösse. Es sei nun an der Oberfläche eines Luftraumes entweder ψ oder $\partial \psi / \partial n$ eine vorgeschriebene Function der Zeit, ferner sei ψ und $\partial \psi / \partial t$ zur Zeit $t = 0$ für jeden Punkt desselben gegeben. Sind ψ_1 und ψ_2 zwei diesen Bedingungen genügende Lösungen, so ist auch $\Psi = \psi_1 - \psi_2$ eine die Differentialgleichung befriedigende Lösung, für welche Ψ resp. $\partial \Psi / \partial n$ an den Grenzflächen dauernd Null bleibt. Demnach ist:

$$8\pi E = \iiint dx dy dz \frac{1}{\varrho^2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} \right)^2 \right]$$

dauernd constant und immer Null, wenn es (wie hier für $t = 0$) einmal Null war. Daraus folgt, dass ψ_1 von ψ_2 nur um eine Constante verschieden sein kann, und damit die Eindeutigkeit der Lösung unter den angeführten Bedingungen.

In ähnlicher Weise ist ψ bis auf eine additive Constante ($= 0$) im Inneren des Leiters eindeutig bestimmt, wenn an der Grenzfläche ψ oder $\partial \psi / \partial n$ als Functionen der Zeit, und für $t = 0$ der Werth des ψ in jedem Punkte des Leiters bekannt ist. Da sich die durch die Oberfläche in denselben tretende Energie in Wärme und magnetische Energie (E_m) umsetzt, so muss, die Lösung $\Psi = \psi_1 - \psi_2$ vorausgesetzt, die Stromwärme durch den Abfall von E_m gedeckt werden; d. h. es ist:

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = - \iiint dx dy dz (u^2 + v^2 + w^2) h.$$

Nun ist für $t = 0$ überall $\Psi = 0$, also gleichzeitig $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, deshalb muss:

$$8\pi E_m = \iiint \frac{dx dy dz \Psi^2}{\varrho^2} \left(\frac{4\pi\lambda}{V} \right)^2$$

immer Null bleiben, da es ja nicht negativ werden kann. Also ist $\Psi = \psi_1 - \psi_2$ immer gleich Null. Es ist jedoch bei Problemen, in welchen ein Dielectricum mit einem Metall

in Wechselwirkung tritt, ein willkürliches Verfügen über ψ oder $\partial\psi/\partial n$ an der Grenzfläche ausgeschlossen. Angenommen, man sei im Stande für jeden der Körper eine Lösung zu finden, die den Zuständen zur Zeit $t = 0$ und noch der Bedingung genügt, dass $\partial\psi/\partial n$ an der Grenzfläche beliebig als Function von t gegeben sei. Nach dem obigen ist das Problem immer eindeutig lösbar, wie beschaffen auch $\partial\psi/\partial n$ an der Oberfläche ist. Die Coexistenz beider Körper erheischt indess das Erfülltsein der Bedingung $(\partial\psi/\partial t)_e = 4\pi\lambda\psi_i$, und diese Bedingung lehrt erst, welchen Eigenschaften $\partial\psi/\partial n$ an der Grenzfläche genügen muss. Hat man $\partial\psi/\partial n$ demgemäß bestimmt, so ist das Problem als gelöst zu betrachten.

II. Der Ausdruck, dass die Vibratormaterie vollkommen leitend sei, soll sagen, dass dieselbe sich von der im Dielectricum bestehenden Energie nichts zu eigen machen kann. Die Tangentialkomponente der magnetischen Kraft fällt in die Oberfläche, es muss daher mit Rücksicht auf den Satz von Poynting die Tangentialkomponente $\partial\psi/\partial n$ an der Leiteroberfläche verschwinden. Durch die Annahme $\psi = 0$ im Inneren des Leiters wird dann wegen $\lambda = \infty$ der zweiten Grenzbedingung genügt.¹⁾ Auch bei dieser Vereinfachung ist das Problem für beliebig gegebene Vibratorformen nicht lösbar. Ausrechnen lässt sich jedoch folgendes Problem: „Es ist ein Vibrator gegeben, dessen Oberfläche durch ein Rotationsellipsoid begrenzt ist. Der zwischen seinen congruenten Hälften liegende Schlitz ist durch die Oberfläche eines confoc. Rotationshyperboloids begrenzt. Während der Oscillation existirt ein die Scheitel der Hyperbelflächen verbindender unendlich gut leitender Funke, dessen Oberfläche wir unbeschadet der Genauigkeit mit einem confoc. Rotationsellipsoid zusammenfallen lassen können, und dessen Halbaxe fast gleich ist dem Abstande der Brennpunkte.“

Wir wählen auf der z -Axe die zwei Punkte $z = -e$ und $z = +e$ zu Brennpunkten. Es sei $r^2 = (z + e)^2 + \rho^2$,

1) Ueber den Grad der Genauigkeit, mit welcher diese Annahme bei wirklichen Leitern, beispielsweise bei Kupfer erfüllt ist, siehe Abschnitt IV dieses Aufsatzes.

$r_1^2 = (z - e)^2 + \varrho^2$. Diese Radienvectoren r und r_1 führen wir an Stelle von z und ϱ als indep. Variable ein.

Statt Gl. (1) haben wir:

$$\frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r_1 \partial r} \left(\frac{r^2 + r_1^2 - 4e^2}{r r_1} \right).$$

Wir setzen $\xi = (r_1 + r)/2$, $\eta = (r_1 - r)/2$. ξ η sind die Halbaxen der durch einen Raumpunkt gehenden confocalen Kegelschnitte. Dieselben als independ. Variable eingeführt, erhält man:

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} (\xi^2 - e^2 - \eta^2 + e^2) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} (\xi^2 - e^2) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} (\eta^2 - e^2).$$

Als Integral setzen wir $\psi = \sin.2\pi/\tau.(t + \vartheta) \cdot \Omega(\xi) \cdot H(\eta)$, wo Ω von ξ , H von η abhängt. Setzen wir $\mu = 2\pi/\tau V$ und verstehen unter ν eine noch zu bestimmende Constante, so muss gelten:

$$(2) \quad \frac{d^2 H}{d \eta^2} + \mu^2 H = \frac{\nu H}{\eta^2 - e^2},$$

$$(3) \quad \frac{d^2 \Omega}{d \xi^2} + \mu^2 \Omega = \frac{\nu \cdot \Omega}{\xi^2 - e^2}.$$

Die Grenzbedingungen, denen diese Grössen Ω , H genügen müssen, sind die folgenden: An der ellipsoidischen Oberfläche, welcher $\xi = a$ entspricht, sowie jener des Funkens $\xi = \bar{a}$, muss $\partial \psi / \partial n$ d. i. $\partial \psi / \partial \xi$, das ist $d\Omega / d\xi$ verschwinden, weil dort keine Tangentialkomponente der electrischen Kraft bestehen kann. 2) Aus gleichem Grunde muss für $\eta = \pm \bar{\eta}$, wo $2\bar{\eta}$ die Entfernung der Hyperbelflächenscheitel bedeutet, $dH / d\eta$ verschwinden. Nebenbei muss H für $\varrho = 0$, d. h. für $\eta = \pm e$ Null sein. Hiermit sind Punkte der Rotationsaxe gemeint, sofern sie außerhalb des Ellipsoides gelegen ist, denn für diese würde sonst der durch $R = -(\partial \psi / \partial z)(1/\varrho)$ bestimmte Werth der Radialkraft unendlich werden. Daher muss ψ und mit ihm H für jedes z , d. h. für $\eta = \pm e$ verschwinden. Der Werth der Z-Kraft oder $(\partial \psi / \partial \varrho)(1/\varrho)$ oder $\partial \psi / \partial r(1/r) + \partial \psi / \partial r_1(1/r_1)$ bleibt in diesen Gebieten endlich.

Diesen Bedingungen lässt sich folgendermaassen genügen. Es sei Ω_1 ein particuläres und

$$\Omega = \Omega_1 \int_k^{\xi} \frac{d\xi}{\Omega_1^2}$$

das vollständige Integral von (3). k ist eine Integrations-constante.

Es hat dann:

$$\frac{1}{\Omega_1} \frac{d\Omega_1}{d\xi} + \int_k^{\xi} \frac{d\xi}{\Omega_1^2}$$

für $\xi = a$ und $\xi = \bar{a}$ Null zu sein. Setzt man einmal $\xi = a$, das andere mal \bar{a} und zieht beide Gleichungen ab, so muss:

$$\int_a^{\bar{a}} \frac{d\xi}{\Omega_1^2} + \int_a^{\bar{a}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\Omega_1} \frac{d\Omega_1}{d\xi} \right) d\xi$$

Null sein. Dies ergibt bei Rücksicht auf Gl. (3) die Bestimmungsgleichung des ν :

$$(4) \quad \nu \cdot \int_a^{\bar{a}} \frac{d\xi}{\xi^2 - e^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d\Omega_1}{d\xi} \right)^2} = \mu^2 \int_a^{\bar{a}} \frac{d\xi}{\left(\frac{d\Omega_1}{d\xi} \right)^2}.$$

Für gestreckte Ellipsoide, wo a und \bar{a} wenig verschieden ist, lässt sich angenähert schreiben:

$$(4') \quad \nu \cdot \int_a^{\bar{a}} \frac{d\xi}{\xi^2 - e^2} = \mu^2 (a - \bar{a}).$$

Wenden wir uns zur Gleichung (2). In derselben bedeutet η soviel als $(r_1 - r)/2$. Hätte man $(r - r_1)/2$, also $-\eta$, das wir η' nennen wollen, an Stelle von η als indep. Variable eingeführt, so würde gelten:

$$(2') \quad \frac{d\Omega}{d\eta'^2} + \mu^2 \Omega = \frac{\nu \Omega}{\eta'^2 - e^2}.$$

Dasselbe $\Omega = f(\eta) = f(-\eta')$, welches der Gl. (2) genügt, genügt auch der Gl. (2'), und damit resultiert die Relation $f''(\eta)f(-\eta) - f''(-\eta)f(\eta) = 0$, welche integriert:

$$(5) \quad f'(\eta)f(-\eta) + f'(-\eta)f(\eta) = C \text{ und:}$$

$$(6) \quad f(-\eta) = f(\eta) e^{\frac{C}{\mu^2} \int_{f(\eta)}^{f(-\eta)} \frac{d\eta}{f(\eta)f(-\eta)}}$$

ergibt.

Ist H_1 ein particuläres Integral von (2) und:

$$H = H_1 \int_{k_0}^{\eta} \frac{d\eta}{H_1^2}$$

das vollständige, so lässt sich k_0 , die Integrationskonstante, jedenfalls so bestimmen, dass H für $\eta = e$ Null wird. Laut (6) verschwindet dann H von selbst für $\eta = -e$. Aus (5) sehen wir, dass die Constante C , $\eta = e$ gesetzt, sich auf Null reduziert, und dass, wenn $dH/d\eta = f'(\eta)$ für $\eta = +\eta$ verschwindet, es von selbst für $\eta = -\eta$ verschwinden muss. Es genügt also, dass:

$$H = H_1 \int_{k_0}^{\eta} \frac{d\eta}{H_1^2}$$

für $\eta = +e$ und $dH/d\eta$ für $\eta = +\bar{\eta}$ verschwindet. Durch Elimination von k_0 resultiert eine Gleichung, die nur mehr (η, e, μ) und ν enthält. Setzt man ν aus (4) hierin ein, so gewinnen wir eine zur Bestimmung von μ dienende Relation $(\eta, a, \bar{a}, e, \mu) = 0$. Wir können demnach die mit dem Vibrator verträglichen Wellenlängen eruiren, wenn es gelingt, für die Gleichungen (2) und (3) particuläre Integrale in geschlossener Form anzugeben. Dies ist nun meines Wissens eine noch zu leistende Aufgabe, da die Gleichung $\partial^2 y / \partial^2 x = y f(x)$ nur in einzelnen Fällen, etwa wo sie die Riccati'sche Form annimmt, geschlossen integriert werden kann.

Wohl aber lässt sich für H_1 eine nach Potenzen von $(e^2 - \eta^2)$ aufsteigende Reihe aufstellen, welche nachweisbar für $\eta^2 < e^2$, eine immer erfüllte Bedingung, convergiert. Dieses H_1 erfüllt zudem von selbst die Bedingung für $\eta = \pm e$ zu verschwinden, es genügt daher, in $dH_1/d\eta = 0$ statt η den Werth $\bar{\eta}$ und statt ν den etwa aus (4) hergenommenen und für gestreckte Vibratoren gültigen Werth einzusetzen, um die Gleichung für die Wellenlängen in Form einer Reihe zu bekommen. Eine andere Reihenentwicklung ist in der Form $\eta F(\eta^2)$ durchführbar.

Vom mathematischen Standpunkte ist die Lösung des Problems eine vollständige, sie bietet jedoch vermöge des complicirten Baues der Coëfficienten der Reihe keinen physikalisch verwerthbaren Ueberblick. Aus diesem Grunde ist die explicite Aufstellung der Reihe unterblieben, zumal das physikalische Interesse sich auf den Fall $\nu = 0$ beschränkt.

III. In diesem Falle hat man $d^2\Omega/d\xi^2 + \mu^2\Omega = 0$, $d^2H/d\eta^2 + \mu^2H = 0$. Das Integral ist:

$$\psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) \cdot \cos \mu (\xi - a) \cdot (C \cos \mu \eta + D \sin \mu \eta).$$

Nun hat ψ für $\psi = \pm e$, die Punkte des ausserhalb des Ellipsoids gelegenen Stückes der Rotationsaxe zu verschwinden. Dies gibt zwei Gruppen von Lösungen:

$$(A) \quad \begin{cases} \cos \mu e = 0 \text{ oder } \tau V = \frac{4e}{2K+1} \text{ und} \\ \psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) \cos \mu (\xi - a) \cos \mu \eta, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} \sin \mu e = 0 \text{ oder } \tau V = \frac{4e}{2K} \text{ und} \\ \psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) \cos \mu (\xi - a) \sin \mu \eta. \end{cases}$$

Hierin bedeutet K eine beliebige ganze Zahl. Beide Gruppen erfüllen die Bedingung $\partial \psi / \partial \xi = 0$ für $\xi = a$. Sie repräsentieren die mit einem geschlossenen metallischen Ellipsoid verträglichen electricischen Schwingungen, und entsprechen sohin dem Falle passend dünner Vibratoren, deren sehr enger Zwischenraum während der Oscillation durch den als sehr gut leitend vorausgesetzten Funken vollständig ausgefüllt wird. Die zur Gruppe (A) gehörige Grundschwingung hat eine Wellenlänge, welche das Doppelte der Brennpunktsentfernung, angenähert dasselbe der ganzen Vibratolänge, beträgt. Die Wellenlängen der Oberschwingungen der Gruppe (A) sind ungeradzahlige, jene der Gruppe (B) geradzahlige aliquote Theile derselben.

Behufs Untersuchung der Kräftevertheilung ersetzen wir in ψ die Grössen ξ und η durch ihre Werthe, und bekommen für die ungeradzahligen Schwingungen:

$$\psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) [\cos \mu (r - a) + \cos \mu (r_1 - a)],$$

für die geradzahligen:

$$\psi = \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta) [\sin \mu (r_1 - a) - \sin \mu (r - a)].$$

Die Kräfte R und Z bestimmen sich durch:

$$(7) \quad Z = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

$$(8) \quad R = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho} \left[\frac{z+e}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{z-e}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right].$$

Zuvörderst sieht man, dass bei den geradzahligen Partialschwingungen für $r = r_1$ die Grösse ψ , und mit ihr die magnetische Kraft in der Mitte des Vibrators verschwindet. Die Normalkraft dagegen hat hierselbst einen nicht verschwindenden Werth. Genau entgegengesetzt ist es bei den ungeradzahligen Schwingungen; ψ verschwindet nicht, wohl aber die Normalkraft. Dieser charakteristische Unterschied gilt nicht blos in diesem speciellen Falle, sondern allgemein.

Die oben besprochene Function $H(\eta)$ hatte die Eigenschaft, dass, wenn sie für ein positives $\eta = e$ verschwindet, sie auch für $\eta = -e$ verschwinden muss. Dasselbe galt von $dH/d\eta$. Dieser Eigenschaft entspricht ein $H = \eta f(\eta^2)$ und ein anderes $H = F(\eta^2)$. Ersteres H verschwindet für $\eta = 0$, und mit ihm ψ und die magnetische Kraft in der Mitte des Vibrators, für $\partial H/\partial\eta$ ergibt sich $f(\eta^2)$, das für $\eta = 0$ nicht Null sein kann, da H und $f(\eta^2)$ blos für $\eta = e$ verschwinden muss. Dagegen bleibt H und ψ in der zweiten Gruppe für $\eta = 0$ von Null verschieden, und es verschwindet:

$$\frac{dH}{d\eta} = \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} (\eta^2),$$

daher auch die Normalkraft für $\eta = 0$.

Daraus können wir schliessen, dass unsere Lösung annähernd richtig bleiben wird, wenn auch der Funke den ganzen Querschnitt des Vibrators nicht ausfüllt. Es zeigt sich dies auch in einem Vergleiche mit den Messungen. Hertz fand für einen Vibrator, dessen Form allerdings nur annähernd mit der Form des unserigen übereinstimmt, die halben Wellenlängen zu 33, 32, 33 cm. Der Vibrator war eine Stange von Cylinderform mit angesetzten Kugeln, und die Distanz der Enden betrug sammt Funkenstrecke (0,3 cm) 30,3 cm. So gross sollte die theoretisch berechnete halbe Wellenlänge sein.

Im Folgenden berechnen wir für unsere stehenden Schwingungen die Vertheilung der electrischen Kräfte auf der Oberfläche des Vibrators. Der Grössenwerth N dieser Normalkraft ergibt sich, wenn die Gleichungen (7) und (8) addirt und quadriert werden. Bequemlichkeitshalber wird $2\partial\psi/\partial r$ durch $\partial\psi/\partial\xi - \partial\psi/\partial\eta$ und $2\partial\psi/\partial r_1$ durch $\partial\psi/\partial\xi + \partial\psi/\partial\eta$ ersetzt. An der Oberfläche ist wegen $\xi = a$

$\partial \psi / \partial \xi = 0$ und $\partial \psi / \partial r = -\partial \psi / \partial r_1 = -\frac{1}{2} \cdot \partial \psi / \partial \eta$. Nach Vollzug einiger Rechnungsoperationen folgt:

$$N = 2 \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \cdot \frac{e}{\sqrt{(a^2 - \eta^2)(a^2 - e^2)}}.$$

Für die ungeradzahligen Schwingungen ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu}{2} \sin \mu \eta \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta),$$

für die geradzahligen $-\frac{\mu}{2} \cos \mu \eta \sin \frac{2\pi}{\tau} (t + \vartheta)$ einzusetzen.

Für die Grundschwingung ist $\mu = 2\pi/4e$, die Normalkraft N wächst von $\eta = 0$, wo sie Null ist bis $\eta = e$, dem Ende des Vibrators, wo sie ihr Maximum erreicht. Links und rechts haben die Kräfte N entgegengesetztes Vorzeichen an symmetrisch gelegenen Punkten. Eine graphische Darstellung der Vibratorellipse mit der Reihe der senkrecht aufstehenden confocalen Hyperbeln ergibt ein anschauliches Bild der Kräftevertheilung. Sie entspricht angenähert, aber nicht genau den Excursionen eines in der Mitte eingeklemmten Stabes, oder einer beiderseits offenen Pfeife. Die Kräftevertheilung für die Partialschwingungen ergibt sich in gleich einfacher Weise.

Nebst dem Vibratorellipsoid gibt es noch andere confocale Ellipsoidflächen, für welche die electrische Tangentialkraft Null ist. Ihre Lage ist bestimmt durch $\sin \mu (\xi - a) = 0$, oder $\xi = a + K\pi/\mu$. Man kann dieselben metallisch machen. Die Entstehung reiner stehender Schwingungen ist an die Existenz einer solchen Fläche gebunden. Es besteht hier eine gewisse Analogie mit den stehenden Schwingungen in Kundt'schen Röhren. Dem schwingenden Stabende entspricht die Vibratoroberfläche, der regulirbaren Querwand das confocale Ellipsoid erwähnter Beschaffenheit. Für die Oberschwingungen existiren noch Hyperbole, die metallisch gemacht werden können. Ihr Durchschnitt mit dem Vibrator erfolgt in den Knoten electrischer Kraft.

Für solche z , gegen welche e verschwindend klein ist, gilt laut (7) . . (8) $R\varrho + Zz = 0$; die Wellen sind transversal. Gleichermaßen gilt für die Aequatorialebene, wo wegen $r = r_1$ $\eta = 0$, $R = 0$ bleibt. Die zum Vibrator parallel gerichtete electrische Kraft Z ist hier mit $\sin \mu (r - a)/r$ proportional.

Knoten derselben liegen in folgenden Abständen von der Vibratormitte:

$$\varrho = 0, \quad \frac{l}{2}\sqrt{2}, \quad 2 \cdot \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad 3 \cdot \frac{l}{2}\sqrt{\frac{4}{3}} \dots$$

Einfachheitshalber ist für $a = e$ gesetzt worden. Man sieht, dass erst für grosse Entfernung die Knotendistanz gleich wird der normalen halben Wellenlänge $l/2$. Aehnliches gilt von der magnetischen Kraft.

Die vollständige Lösung des Problems erhält man durch Summirung der, den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Werthe des ψ . Jeder Summand enthält neben einer multiplicativen Constante A_k noch eine Phasenconstante ϑ_k [in $\sin 2\pi/\tau_k(t + \vartheta_k)$]. Dieselben hat man einer zur Zeit $t = 0$ bestehenden Vertheilung der electrischen und magnetischen Kräfte, also einem gegebenen ψ und $\partial\psi/\partial t$ anzupassen. Hiermit ergibt sich, wenn die Schwingungen stehende bleiben, ein Gesetz für die Stärke der Partialschwingungen, andernfalls der genaue Ausdruck für die Beschaffenheit der fortschreitenden Welle. Bestimmte Aussagen über die der Funkenbildung unmittelbar vorausgehenden Zustände lassen sich nicht machen. Man kann sich hiervon etwa folgende Vorstellung machen: Die Vertheilung der Kräfte ist zuerst eine statische, die magnetische Kraft, und mit ihr $\partial\psi/\partial t$ überall gleich Null, was für ϑ_k den Werth $\pi/2$ fordert. Die electrostatischen Kräfte stehen überall auf dem Leiter senkrecht. Eine Gruppe statischer Kraftlinien wird als Funke plötzlich zu einem, wie wir hier voraussetzen, sehr guten Leiter, wodurch mit den Bedingungen des Systems unverträgliche Zustände geschaffen werden, indem Kraftlinien in die Fläche des Leiters (Funkens) fallen. Diese Störung pflanzt sich als Welle electromagnetischer Energie in den Aussenraum fort, und zwar auf Kosten des früheren, beschränkten Vorrathes statischer Energie. Das Vorhandensein solcher Tangentialkräfte an der Vibratoroberfläche ist nach dem Satze von Poynting sogar wesentliche Bedingung dafür, dass electromagnetische Energie sich von da aus dauernd in den Aussenraum fortpflanzt. Ihre Vertheilung und Grösse ist jedoch keine willkürliche, vielmehr ist sie so zu treffen, dass die Werthe der tangentialen Kräfte beider Art

an der Stirnfläche der fortschreitenden Welle continuirlich in die Werthe übergehen, welche hier beim Eintreffen der Welle eben bestanden haben.

Für Vibratoren unserer Art ist anzunehmen, dass der feine Schlitz nahezu ausschliesslicher Sitz der electrostatischen Energie gewesen ist. Bis zu der Zeit, wo ein Raumpunkt von der Wellenfront getroffen wurde, waren hier alle Kräfte Null.

Unsere, sogleich näher zu besprechende fortschreitende Welle¹⁾:

$$\psi = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

erfüllt in der That die Bedingung, dass für $t = (\xi - a) / V$ der Werth von $\partial \psi / \partial \xi$ und $\partial \psi / \partial t$ an der ellipsoidischen Wellenfront Null wird.

Der für die stehenden Schwingungen aufgestellte Werth des $\psi = \sin 2\pi/\tau \cdot (t + \vartheta) \cos \mu (\xi - a) \cos \mu \eta$ zerfällt in zwei Summanden. Der erste²⁾:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

entspricht Wellen, die von kleineren zu grösseren ξ , also in den Raum hinauslaufen. Der zweite:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\pi}{2} + \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

entspricht rückkehrenden Wellen, die an einem metallischen confocalen Ellipsoid von der Halbaxe $\bar{\xi} = a + K\pi/\mu$ reflektirt worden sind. In der That lässt sich die zweite Welle auch in der Form:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left[t + \frac{\pi}{2} - \frac{2(\bar{\xi} - a) - (\xi - a)}{V} \right] \cos \mu \eta$$

schreiben. Ist $\bar{\xi}$ unendlich gross, d. h. die reflectirende Fläche sehr weit, so wird in endlichen Zeiten, vor Eintritt der stehenden Schwingung nur die erste Welle:

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\xi - a}{V} \right) \cos \mu \eta$$

bestehen. Wir setzten $a = e$, um die weitere Rechnung für den, ohnehin gestreckten Vibrator, bequemer durchzuführen

1) Wir beschränken uns auf die Grundschwingung.

2) ϑ ist dem Obigen zufolge $= \pi/2$ gesetzt.

zu können. Für Punkte der Aequatorialebene ($\eta = 0$) kann e durch $\varrho \cot \varphi$, und ξ durch $\varrho / \sin \varphi$ ersetzt werden. Dabei ist ϱ die Entfernung von der Vibratormitte, und φ der Winkel, den eine vom Brennpunkte zu ihm gezogene Richtung mit der Rotationsaxe einschließt. Der durch $\partial \psi / \partial t (1/\varrho V)$ definirte Werth der magnetischen Kraft, gleichwie die der Vibratoraxe parallele Componente electrischer Art Z erweisen sich proportional mit dem Ausdrucke:

$$\sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\varrho}{V \cot \frac{\varphi}{2}} \right).$$

Die Kräfte beiderlei Art pflanzen sich demnach in der Aequatorialebene mit einer variablen, für $\varphi = 0$ unendlich grossen Geschwindigkeit fort, die erst bei $\varphi = 90^\circ$, somit für weite Entfernung von der Vibratormitte den normalen Werth $3 \cdot 10^{10}$ cm annimmt.

In seinen allerersten, diesen Gegenstand betreffenden Versuchen unterwarf Hertz einen secundären Kreis der gleichzeitigen Einwirkung von Draht- und directen Wellen. Die hier auftretenden Erscheinungen lassen sich mit unserer Theorie auch für den Fall in Einklang bringen, wenn die Drahtwellen, conform mit der Maxwell'schen Theorie, sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

IV. Die Bedingungsgleichung für die Continuität der Tangentialcomponente der magnetischen Kraft an der Oberfläche des Leiters gestattet den Genauigkeitsgrad zu prüfen, mit welchem unsere Voraussetzung richtig ist, dass die gewöhnlichen guten Leiter als unendlich gut leitend anzusehen sind. Wir ersetzen in dem mathematischen Ausdrucke obiger Bedingung $\partial \psi_e / \partial t = 4\pi \lambda \psi_i$, λ durch $V^2 \cdot \sigma \cdot 10^8$, wo $V = 3 \cdot 10^{10}$, und σ die auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitfähigkeit des Vibratormetalls bedeutet. $(\partial \psi_e / \partial t)$ [in Luft] ist als periodische Grösse von derselben Größenordnung, wie $\psi_e \cdot 2\pi/\tau$. Damit ergibt sich ψ_i / ψ_e als Grösse von der Ordnung $1 : 2 \cdot 3 \cdot \sigma (\tau V) 10^5$. Für Kupfer ($\sigma = 50$) und Wellenlängen $\tau V = 100$ cm ist ψ_i im Innern des Leiters der $3 \cdot 10^9$ te Theil seines Werthes in Luft. Wir setzen, $\lambda = \infty$ annehmend, ψ_i gleich Null, und sehen, dass

dies bei wirklichen Leitern sehr genau eintrifft. In ähnlichem Sinne wird es gestattet sein, den Funken als unendlich gut leitend anzunehmen, sei auch seine Leitfähigkeit mehrere tausende Mal schlechter, als jene des Kupfers. Verfolgen wir die entgegengesetzte Annahme, und sprechen dem Funken jede Leitfähigkeit ab. Unser Problem in Abschnitt II ist dann so zu formuliren: Es ist ψ so zu bestimmen, dass $\partial\psi/\partial n$ für $\eta = \pm\eta$ und $\xi = a$ verschwindet. Damit ist wohl $H(\eta)$ eindeutig bestimmt, nicht aber Ω . Wir nehmen deshalb noch an, dass der Funke, welcher in der Richtung der (stärksten) Kraftlinie entstand, diese Eigenschaft während seiner Existenz beibehält. Dann muss die normale Componente $\partial\psi/\partial\eta$ längs der Funkenoberfläche für jedes η verschwinden, was nur für $\Omega = 0$ möglich ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass daselbst die magnetische Kraft den Werth Null annimmt. Dieser Forderung entsprechen nur die geradzahligen Partialschwingungen. Die tatsächlich beobachtete ungeradzahlige Grundschwingung wird theoretisch unmöglich, und damit ist der Beweis geliefert, dass der Funke die Rolle eines Leiters spielt.

Brünn, im März 1891.

IX. *Ueber die Spectra der Elemente der zweiten
Mendelejeff'schen Gruppe;*
von H. Kayser und C. Runge.

(Im Auszuge mitgetheilt von den Herren Verfassern nach den Abhandl.
der Berl. Acad. d. Wiss. 1891.)

Von der ersten Mendelejeff'schen Gruppe der Elemente haben wir die Alkalien untersucht, und haben nachweisen können¹⁾, dass ihre Linienspectra durchaus analog und gesetzmässig gebaut sind. Die Gesetze liessen sich am einfachsten aussprechen, wenn man nicht die Wellenlängen, sondern ihr Reciprokes, Schwingungszahlen, einführt. Bei den Alkalien kommen die Linien immer paarweise vor, und die Paare liessen sich zu Serien ordnen, welche durch die Gleichung $\lambda^{-1} = A + Bn^{-2} + Cn^{-4}$ mit grosser Genauigkeit dargestellt wurden; hier bedeutet λ die Wellenlänge, A , B , C Constante, und für n ist die Reihe der ganzen Zahlen zu setzen, um die verschiedenen Linien zu erhalten. Es zeigte sich, dass der kleinste mögliche Werth von n immer gleich 3 ist. Unter den Serien unterschieden wir drei Arten: Die Hauptserie enthält die stärksten Linien des Elements; in ihr werden die Paare immer enger, die Schwingungsdifferenz der beiden Linien ist umgekehrt proportional der vierten Potenz der Ordnungszahl n . Die erste Nebenserien enthält starke, sich stark nach beiden Seiten verbreiternde Linien; die Schwingungsdifferenz ist für alle Paare constant. Die zweite Nebenserien endlich enthält schwächere, sich nur nach Roth hin verbreiternde Linien, die Schwingungsdifferenz ist constant. Die constanten Schwingungsdifferenzen waren nahezu proportional dem Quadrat des Atomgewichts des betreffenden Elementes; alle drei Serien rückten mit wachsendem Atomgewicht nach dem rothen Ende des Spectrums.

Wir haben uns nun zu der zweiten Mendelejeff'schen

1) Kayser u. Runge, Abhandl. d. Berl. Acad. 1890; Wied. Ann. 41,
p. 302—320. 1890.

Gruppe gewandt, hier aber zunächst das Be fortgelassen, da sein äusserst linienarmes Spectrum schwer zu erhalten scheint. Von einigen der hierher gehörigen Elemente waren Regel-mässigkeiten schon bekannt. Liveing und Dewar¹⁾ haben wohl zuerst auf die Triplets bei Mg, Zn, Ca aufmerksam gemacht, welche abwechselnd scharf und unscharf sind; Hartley²⁾ fand, dass die Schwingungsdifferenzen der drei Linien für alle Triplets jedes Elementes constant seien, und verglich Mg, Zn, Cd; wir selbst haben schon früher gezeigt³⁾, dass in einigen dieser Elemente Serien vorkommen. Bell⁴⁾ mass das Spectrum des Cd, und verglich es mit dem der anderen Elemente. Dann mass Ames⁵⁾ die meisten der Triplets in Zn und Cd, und fand zuerst richtig den analogen Bau beider Spectra. Endlich gab Rydberg⁶⁾ in seiner vorläufigen Mittheilung an, alle Elemente der zweiten Gruppe besässen zwei Serien von Triplets, welche an derselben Stelle endigen. Die Schwingungsdifferenz zwischen der ersten und zweiten Linie wachse etwas schneller, als das Quadrat des Atomgewichts.

Die Methoden, welche wir zur Herstellung der Spectra benutzten, sind ganz die früher beschriebenen. Die Substanzen, meist die Metalle selbst, zum Theil auch ihre Salze, wurden im Kohlebogen verdampft, die Spectra mittelst Rowland'scher Concavgitter grösster Art erzeugt und photographirt, die Platten mit Hülfe der in ihnen auftretenden Eisenlinien ausgewerthet. Dabei ist, wie früher, allen Wellenlängen der Werth 5890.19 für D_2 zu Grunde gelegt, also derselbe Werth, auf welchen die zweite Ausgabe des Rowland'schen Sonnenatlas basirt ist.

Die Spectren sind bisher meist nur mittelst des Inductions-funkens erzeugt worden; nur einzelne von ihnen, oder Theile derselben waren von Liveing und Dewar, Lockyer,

1) Liveing u. Dewar, Phil. Trans. **174**. 1883.

2) Hartley, Chem. News **43**. p. 287. 1881; Journ. Chem. Soc. p. 84. 1882; Journ. Chem. Soc. p. 390. 1883.

3) Runge, Rep. Brit. Ass. p. 576. 1888.

4) Bell, Amer. Journ. of sc. (3) **31**. 1886.

5) Ames, Phil. Mag. (5) **30**. p. 33. 1890.

6) Rydberg, Zeitschr. f. phys. Chem. **5**. p. 227. 1890.

Cornu im Kohlebogen hergestellt. Es zeigt sich, was auch Liveing und Dewar bemerkten, ein Unterschied zwischen dem Funken- und Bogenspectrum: bei Mg, Ca, Sr, Ba ist derselbe noch gering, betrifft hauptsächlich nur verschiedene Intensität einzelner Linien; bei Zn, Cd, Hg aber sind die Unterschiede außerordentlich gross, sodass die stärksten Linien des einen Spectrums zum Theil im anderen fehlen. Beiden Spectren gemeinsam sind die Triplets, aber dieselben dominiren im Bogenspectrum viel entschiedener, sodass wir sie für dieses als charakteristisch betrachten können; im Funvenspectrum dagegen treten sie so zurück, dass man sie hier nicht bemerkt hat. Ob dieser Unterschied nur an der verschiedenen Temperatur liegt, oder ob beim Inductionsfunken den Atomschwingungen Zwang angethan wird, wie vielfach angenommen wird, wollen wir hier unerörtert lassen. Jedenfalls zeigt sich, dass das Bogenspectrum für unsere Zwecke das allein geeignete ist. Von den untersuchten Spectren ist das Ba das linienreichste, war aber bisher am unvollständigsten bekannt; wir haben die Zahl seiner Linien mehr als verdoppeln müssen.

Wir wenden uns nun zu den einzelnen Elementen.

1) Magnesium.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5711,56	0,15	5							
5528,75	0,10	3							
5183,84	0,03	1	<i>h</i>	—	—	—	3	5180,62	+ 53
5172,87	0,03	1	<i>h</i>	—	—	—	3	5119,80	+ 53
5167,55	0,03	2	<i>h</i>	—	—	—	3	5114,57	+ 53
4730,42	0,25	6	<i>v R</i>						
4703,39	0,05	2	<i>v R</i>						
4571,93	0,05	4							
4352,18	0,05	2	<i>v R</i>						
4167,81	0,10	6	<i>u</i>						
4058,45	1,00	5	<i>su</i>						
3987,08	1,00	5	<i>su</i>						
3838,44	0,03	1	<i>h</i>	4	3838,46	- 0,02			
3832,46	0,03	1	<i>h</i>	4	3832,47	- 0,01			
3829,51	0,03	1	<i>h</i>	4	3829,51	0,00			
3336,83	0,03	1	<i>v</i>	—	—	—	4	3336,86	- 0,03
3332,28	0,03	2	<i>v</i>	—	—	—	4	3332,28	0,00
3330,08	0,03	2	<i>v</i>	—	—	—	4	3330,05	+ 0,03
3097,06	0,03	1	<i>h</i>	5	3097,05	+ 0,01			
3093,14	0,08	2	<i>h</i>	5	3093,15	- 0,01			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3091,18	0,08	2	λ	5	3091,21	-0,08			
2942,21	0,08	2	v	—	—	—	5	2942,16	+0,05
2938,67	0,08	3	v	—	—	—	5	2938,68	-0,01
2936,99	0,08	4	v	—	—	—	5	2937,00	-0,01
2936,61	0,05	4							
2928,74	0,05	4							
2915,57	0,05	4							
2852,22	0,08	1	λ , sehr breit	6	2851,53	—			
2848,53	0,15	4	su	6	2848,22	+0,31			
2846,91	0,15	4	su	6	2846,58	+0,38			
2802,80	0,08	1	λ						
2798,07	0,08	4							
2795,63	0,08	1	λ						
2790,88	0,08	4							
2783,08	0,08	2	λ						
2781,53	0,08	2	λ	—	—	—	6	2781,55	-0,02
2779,94	0,08	1	λ	—	—	—			
2778,36	0,08	2	λ	—	—	—	6	2778,37	-0,01
2776,80	0,08	2	λ	—	—	—	6	2776,83	-0,03
2768,57	0,15	4	vR						
2765,47	0,15	4	vR						
2736,84	0,15	5	su	7	2736,84	0,00			
2733,80	0,15	5	su	7	2733,80	0,00			
2732,35	0,15	5	su	7	2732,29	+0,06			
2698,44	0,15	5	u	—	—	—	7	2698,38	+0,11
2695,53	0,15	5	u	—	—	—	7	2695,38	+0,20
2693,97	0,15	5	u	—	—	—	7	2693,88	+0,09
2672,90	0,20	6	su	8	2673,15	-0,25			
2669,84	0,20	6	su	8	2670,25	-0,41			
2668,26	0,20	6	su	8	2668,81	-0,55			
2649,30	0,50	6	su	—	—	—	8	2649,08	+0,27
2646,61	0,50	6	su	—	—	—	8	2646,14	+0,47
2645,22	0,50	6	su	—	—	—	8	2644,75	+0,47
2633,13	1,00	6	su	9	2633,80	-0,67			
2630,52	1,00	6	su	9	2630,98	-0,46			
—	—	—	—	9	2629,58	—			
(2605,4)	—	—	—	10	2607,64	—			

In der ersten Spalte vorstehender Tabelle stehen die von uns gemessenen Wellenlängen; nur die letzte eingeklammerte Linie haben wir wegen zu grosser Unschärfe nicht selbst gemessen, sondern die Angabe von Liveing und Dewar übernommen. In der zweiten Spalte ist der grösste Fehler angegeben, welchen wir für möglich halten; es ist nicht etwa der wahrscheinliche oder mittlere Fehler der Messungen, welcher meist wesentlich kleiner sein würde. Die dritte Spalte enthält eine Schätzung der Intensität, wobei 1 die stärkste, 6 die schwächste Linie bedeutet. Spalte 4 gibt eine kurze

Charakterisirung der Linie; es bedeutet: h umgekehrt, v verbreitert, vR verbreitert nur nach der Seite der längeren Wellen, nach Roth, vV verbreitert nur nach Violett, u unscharf, su sehr unscharf. Die Bedeutung der folgenden Spalten ist gleich zu erwähnen.

Im Magnesiumspectrum fallen auf den ersten Blick Gruppen von drei Linien auf, welche immer enger zusammenrücken, je mehr man zu kurzen Wellen kommt, und welche abwechselnd hell und unscharf, und schwächer aber schärfer sind; sie sind in der Tabelle mit fetter Schrift gedruckt. Die Schwingungsdifferenzen zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Linie wollen wir mit ν_1 und ν_2 bezeichnen; sie sind identisch für alle Triplets. Die verschiedenen Arten der Triplets bilden je eine Serie, welche wir wegen der constanten Schwingungsdifferenz Nebenserie nennen. Und zwar bezeichnen wir wieder die stärkere, unschärfere, in ihren ersten Gliedern sich leicht umkehrende Serie als erste Nebenserie, die schwächere, schärfere als zweite Nebenserie.

Die Serien werden durch folgende Gleichungen dargestellt, wenn man, wie wir es stets thun, λ in Ångström'schen Einheiten ausdrückt:

1. Nebenserie:

$$10^8 \lambda^{-1} = 39796,10 - 130\,398\,n^{-2} - 1\,432\,090\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 39836,79 - 130\,398\,n^{-2} - 1\,432\,090\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 39857,00 - 130\,398\,n^{-2} - 1\,432\,090\,n^{-4},$$

2. Nebenserie:

$$10^8 \lambda^{-1} = 39836,74 - 125\,471\,n^{-2} - 518\,781\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 39877,95 - 125\,471\,n^{-2} - 518\,781\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 39897,91 - 125\,471\,n^{-2} - 518\,781\,n^{-4}.$$

Für $n = 3$ geben diese Gleichungen den ersten positiven Werth, ganz ebenso, wie wir es bei den Alkalien gefunden haben, und wie es nach der Balmer'schen Formel für Wasserstoff gilt. Die Constanten der Formeln sind mit Wahrscheinlichkeitsrechnung aus allen beobachteten Wellenlängen, ausser denen für $n = 3$ berechnet. Für $n = 3$ findet man danach für die erste Nebenserie $\lambda = 13111, 13041, 13007,$

für die zweite Nebenserien die in Spalte 9 angegebenen Werthe, welche um 53 A.-E. zu klein sind. Das ist dieselbe Erscheinung, welche wir bei den Alkalien gefunden haben, und welche darauf hindeutet, dass unsere Formel unvollständig ist, dass sie noch durch ein Glied mit n^{-6} oder n^{-8} ergänzt werden müsste. Warum wir es trotzdem nicht einführen, ist früher auseinander gesetzt worden.¹⁾

Die nach den Formeln berechneten Wellenlängen sind in Spalte 6 für die erste Nebenserien, in Spalte 9 für die zweite angegeben, während Spalte 5 und 8 die Ordnungszahl n , Spalte 7 und 10 die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung enthält. Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung eine sehr gute, die Differenzen sind im allgemeinen nicht grösser, als die Fehlergrenze. Nur bei der Linie 2852,22 findet sich eine grosse Abweichung. Diese Linie ist bei weitem die stärkste des ganzen Magnesiumspectrums, sie verbreitert sich manchmal bis zu 50 oder 100 A.-E. Sie gehört daher jedenfalls nicht zum Triplet, sondern wird die erste Linie desselben verdecken.

Die Differenzen ν_1 und ν_2 sind beim Magnesium:

$$\begin{array}{ll} \text{für die erste Nebenserien: } & \nu_1 = 40,7; \quad \nu_2 = 20,7, \\ " \quad " \quad \text{zweite} \quad " : & \nu_1 = 41,2; \quad \nu_2 = 20,0. \end{array}$$

Es finden sich im Spectrum noch mehrere Linienpaare, welche eine Schwingungsdifferenz von nahezu $2\nu_1$ und solche welche ν_1 haben, nämlich:

2802,80 (1)		Schwingungsdifferenz	91,5,
2795,63 (1)			
2798,07 (4)			
2790,88 (4)		"	" 92,1,
2936,61 (4)			
2928,74 (4)		"	" 91,5,
2783,08 (2)			
2779,94 (1)		"	" 40,6,
2768,57 (4)		"	" 40,5.
2765,47 (4)			

Aehnliche Paare ausser den Triplets werden wir auch bei den übrigen Elementen finden.

1) Kayser u. Runge, Abhandl. d. Berl. Acad. 1890. p. 36.

2) Calcium.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6499,85	0,10	4							
6493,97	0,10	4							
6471,85	0,10	4							
6462,75	0,10	3	<i>h</i>						
6449,99	0,10	4							
6439,36	0,10	1	<i>h</i>						
6169,87	0,10	3							
6169,36	0,10	4							
6166,75	0,10	4							
6163,98	0,10	4							
6162,46	0,10	1	<i>h</i>	—	—	—	3	6100,98	+61
6161,60	0,10	5							
6122,46	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3	6061,86	+61
6102,99	0,05	2	<i>h</i>	—	—	—	3	6042,76	+60
5867,94	0,10	3	<i>v R</i>						
5857,77	0,10	1	<i>u</i>						
5603,06	0,05	2							
5601,51	0,05	2							
5598,68	0,05	2	<i>u</i>						
5594,64	0,05	1	<i>u</i>						
5590,30	0,05	2							
5588,96	0,05	1							
5582,16	0,05	2							
5513,07	0,10	2							
5349,66	0,05	1							
5270,45	0,05	1							
5265,79	0,05	2							
5264,46	0,05	3							
5262,48	0,05	3							
5261,93	0,05	3							
5260,58	0,05	4							
5189,05	0,05	3							
5041,93	0,05	2	<i>v R</i>						
4878,34	0,10	1	<i>v R</i>						
4847,22	0,20	4	<i>v V</i>						
4833,85	1,00	6	<i>v V</i>						
4823,04	1,00	6	<i>v V</i>						
4807,47	1,00	6	<i>v V</i>						
4685,40	0,50	4	<i>v V</i>						
4624,71	0,50	6	<i>v V</i>						
4586,12	0,10	1							
4581,66	0,10	2							
4578,82	0,10	2							
4527,17	0,10	3							
4512,73	1,00	6	<i>u</i>						
4509,89	1,00	6	<i>u</i>						
4508,04	1,00	6	<i>u</i>						
4456,81	0,03	4							
4456,08	0,03	2	<i>h</i>	4	4456,09	-0,01			
4454,97	0,03	1	<i>h</i>						
4435,86	0,03	2	<i>h</i>	4	4435,81	+0,05			
4435,13	0,03	1	<i>h</i>	4	4425,66	-0,05			
4425,61	0,03	1	<i>h</i>	4	4425,66	-0,05			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4355,41	0,10	3	v						
4318,80	0,08	2	h						
4307,91	0,08	2	h						
4302,68	0,08	1	h						
4299,14	0,08	3							
4289,51	0,08	2	h						
4283,16	0,08	2	h						
4240,58	0,10	4							
4226,91	0,08	1	h						
4098,82	0,10	4	v R						
4095,25	0,10	5	v R						
4092,93	0,10	5	v R						
3973,89	0,05	3	v R	—	—	—	4	3973,87	+0,02
3968,68	0,08	1	h						
3957,23	0,05	3	v R	—	—	—	4	3957,24	-0,01
3949,09	0,05	4	v R	—	—	—	4	3949,09	0,00
3933,88	0,08	1	h						
3737,08	0,08	4							
3706,18	0,08	4							
3658,62	0,05	4							
3644,45	0,05	1	h	5	3644,46	-0,01			
3630,82	0,05	2	h	5	3630,88	-0,06			
3624,15	0,05	2	h	5	3624,08	+0,07			
3487,76	0,05	3	v R	—	—	—	5	3487,78	-0,02
3474,98	0,05	4	v R	—	—	—	5	3474,96	+0,02
3465,68	0,05	4	v R	—	—	—	5	3468,68	0,00
3361,92	0,10	2	v V	6	3361,84	+0,08			
3350,22	0,10	2	v V	6	3350,29	-0,07			
3344,49	0,10	3	v V	6	3344,49	0,00			
3286,26	0,10	4	v R	—	—	—	6	3286,26	0,00
3274,88	0,10	5	v R	—	—	—	6	3274,88	0,00
3269,31	0,10	5	v R	—	—	—	6	3269,29	+0,02
3225,74	0,50	4	v V	7	3226,06	-0,32			
3215,15	0,50	4	v V	7	3215,41	-0,26			
3209,68	0,50	5	v V	7	3210,08	-0,40			
3181,40	0,08	4		—	—	—	7	3180,67	+0,73
3179,45	0,08	8							
3170,23	0,50	6	u	—	—	—	7	3170,00	+0,23
3166,95	2,00	6	su	—	—	—	7	3164,77	+2,18
3158,98	0,08	3							
3150,85	0,50	5	u	8	3149,18	+1,67			
3140,91	0,50	5	u	8	3139,04	+1,87			
3136,09	0,50	6	u	8	3133,95	+2,14			
3117,74	1,00	6	su	—	—	—	8	3117,64	+0,10
3107,96	1,00	6	su	—	—	—	8	3107,40	+0,56
3101,87	1,00	6	su	9	3101,00	+0,87	8	3102,37	-0,50
—	—			9	3091,16	—			
—	—			9	3086,23	—			
3008,95	0,05	4							
2999,76	0,10	4							
2997,42	0,05	4							
2995,06	0,05	4							
2398,66	0,05	2							
2275,60	0,10	8							
2200,84	0,10	5							

Auch das Spectrum des Ca besitzt zwei Serien von Triplets, deren Linien in vorstehender Tabelle wieder durch fetten Druck hervorgehoben sind. Die Linien der ersten Nebenserien sind stärker, leicht umkehrbar in den ersten Triplets, verbreitert hauptsächlich nach der Seite der kürzeren Wellen in den späteren Triplets; die zweite Nebenserien ist schwächer, schärfer, verbreitert nach Roth hin. Unter Benutzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man folgende Gleichungen:

erste Nebenserien:

$$10^8 \lambda^{-1} = 33919,51 - 123\,547\,n^{-2} - 961\,696\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 34022,12 - 123\,547\,n^{-2} - 961\,696\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 34073,82 - 123\,547\,n^{-2} - 961\,696\,n^{-4},$$

zweite Nebenserien:

$$10^8 \lambda^{-1} = 34041,17 - 120\,398\,n^{-2} - 346\,097\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 34146,95 - 120\,398\,n^{-2} - 346\,097\,n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 34199,09 - 120\,398\,n^{-2} - 346\,097\,n^{-4}.$$

Für $n = 3$ findet sich in beiden Serien der erste mögliche Werth; für die erste Nebenserie berechnet man die Wellenlängen 12020, 11874, 11801; für die zweite Serie ergeben sich Zahlen, welche wieder um etwa 60 A.-E. kleiner sind, als die beobachteten.

Bei dem ersten Triplet der ersten Nebenserien findet sich eine Erscheinung, welcher wir bei den anderen Elementen wieder begegnen werden: dasselbe besteht nicht aus drei einfachen Linien, sondern an die Stelle der ersten dieser Linien tritt eine dreifache, an die Stelle der zweiten eine zweifache Linie. Bei der Rechnung haben wir von der dreifachen Linie die mittlere, von der zweifachen die grössere Wellenlänge gewählt, weil man mit ihnen dieselben Schwingungsdifferenzen erhält, wie in den übrigen Triplets der Serie. Diese Auswahl hat zwar etwas Willkürliches, da die betreffenden Linien nicht die stärksten sind, sondern an Intensität hinter der kleineren Wellenlänge zurückstehen; es zeigt sich aber, dass in den anderen Spectren, ausser bei Sr, dieselbe Auswahl getroffen werden muss.

Für Ca ist in der ersten Nebenserie $\nu_1 = 102,6$; $\nu_2 = 51,7$,
in der zweiten Nebenserie $\nu_1 = 105,8$; $\nu_2 = 52,1$.

Es ist hier kein Zweifel möglich, dass die beiden Arten von Triplets etwas verschiedene Abstände haben. Im Ca-Spectrum findet sich noch eine ganze Anzahl gesetzmässig gelagerter Linien. Zunächst sind noch zwei Triplets, die nicht zu den Serien gehören, aber gleiche Schwingungsdifferenzen zeigen, vorhanden:

$$\begin{array}{l} 4318,80 \\ 4299,14 \\ 4289,51 \end{array} \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 105,9 \\ \nu_2 = 52,2 \\ \nu_3 = 67,2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} 4847,22 \\ 4823,04 \\ 4807,47 \end{array} \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 103,4 \\ \nu_2 = \\ \nu_3 = \end{array} \right\}$$

Das letzte Triplet ist verbreitert nach Violett; auch bei Zn, Cd, Hg werden wir dieselbe Erscheinung finden, dass sie je ein nicht zu den Serien gehörendes Triplet besitzen, welches unscharf nach Violett ist.

Ferner hat Ca Paare mit nahezu der Schwingungsdifferenz $2\nu_1$ und solche mit ν_1 :

$$\begin{array}{ll} 3968,63(1h) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 222,9, & 4302,68(1h) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 105,9, \\ 3933,83(1h) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 223,1, & 4283,16(2h) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 105,7, \\ 3737,08(4) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 223,1, & 3006,95(4) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 105,7, \\ 3708,18(4) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 223,1, & 2997,42(4) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 105,7, \\ 6493,97(4) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 105,1, & \\ 6449,95(4) \left. \begin{array}{l} \text{Schwingungs-} \\ \text{differenz} \end{array} \right\} 105,1, & \end{array}$$

Endlich ist noch eine Reihe viel engerer Triplets vorhanden, welche sich nicht in eine Serie ordnen:

$$\begin{array}{ll} 5601,51 \left. \begin{array}{l} \nu_3 = 21,9 \\ \nu_4 = 13,9 \end{array} \right\} & 5270,45 \left. \begin{array}{l} \nu_3 = 21,6 \\ \nu_4 = 14,0 \end{array} \right\} \\ 5594,64 & 5264,46 \\ 5590,30 & 5260,58 \\ 4586,12 \left. \begin{array}{l} \nu_3 = 21,2 \\ \nu_4 = 13,5 \end{array} \right\} & 4098,82 \left. \begin{array}{l} \nu_3 = 21,3 \\ \nu_4 = 13,8 \end{array} \right\} \\ 4581,66 & 4095,25 \\ 4578,82 & 4092,93 \end{array}$$

Vielleicht gehört noch: 4512,73; 4509,89; 4508,04 hierher, welche Linien aber zu ungenau bestimmbar sind.

3) Zink.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5182,20	0,10	2	<i>v R</i>	—	—	—	3	4752,96	+58
4810,71	0,08	1	<i>h</i>	—	—	—	3	4666,66	+56
4722,26	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3	4625,72	+55
4680,38	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3		
4630,06	0,10	2	<i>v R</i>	—	—	—	3		
4298,54	0,10	5	<i>u</i>	—	—	—	3		
4293,02	0,05	5		—	—	—	3		
4101,94	0,10	3		—	—	—	3		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4058,02	0,03	2							
4019,75	0,05	4							
3740,12	0,10	4							
3688,63	0,03	2	<i>v</i>						
3671,71	0,05	3							
3572,90	0,03	5							
3515,26	0,20	6	<i>u</i>						
3346,04	0,10	4							
3345,62	0,05	2	<i>h</i>	4	3345,70	-0,08			
3345,13	0,08	1	<i>h</i>						
3303,03	0,08	2	<i>h</i>	4	3303,00	+0,03			
3302,67	0,03	2	<i>h</i>						
3282,42	0,08	2	<i>h</i>	4	3282,42	0,00			
3075,99	0,03	2	<i>h</i>						
3072,19	0,05	1	<i>h</i>				4	3072,19	0,00
3035,93	0,05	1	<i>v</i>				4	3035,90	+0,03
3018,50	0,05	2	<i>vR</i>				4	3018,52	-0,02
2913,88	0,05	4							
2878,39	0,03	3							
2868,43	0,03	3							
2833,18	0,03	2	<i>h</i>						
2823,27	0,03	3							
2802,11	0,03	4	<i>h</i>						
2801,00	0,03	1	<i>h</i>	5	2800,97	+0,03			
2781,38	0,20	4	<i>vV</i>						
2771,05	0,03	3	<i>h</i>						
2770,94	0,03	2	<i>h</i>	5	2770,98	-0,04			
2756,53	0,10	3	<i>h</i>	5	2756,49	+0,04			
2751,49	0,20	5	<i>vV</i>						
2736,96	0,20	5	<i>v</i>						
2712,60	0,05	2	<i>vR</i>				5	2712,58	+0,02
2706,64	0,05	3							
2697,54	0,10	5	<i>v</i>						
2684,29	0,05	2	<i>vR</i>				5	2684,25	+0,04
2670,67	0,05	3	<i>vR</i>				5	2670,65	+0,02
2663,25	0,05	2							
2623,87	1,00	6	<i>su</i>						
2608,65	0,05	2	<i>h</i>	6	2608,59	+0,06			
2601,03	1,00	5	<i>su</i>						
2582,57	0,10	2	<i>h</i>	6	2582,56	+0,01			
2577,34	0,05	4							
2575,15	0,15	5	<i>su</i>						
2570,00	0,10	8	<i>h</i>	6	2569,97	+0,03			
2567,99	0,10	3	<i>vR</i>				6	2568,00	-0,01
2562,70	1,00	5	<i>su</i>						
2558,08	0,05	2							
2542,53	0,10	3	<i>vR</i>				6	2542,60	-0,07
2530,34	0,10	5	<i>vR</i>				6	2530,40	-0,06
2516,00	0,20	3	<i>su</i>	7	2516,11	-0,11			
2502,11	0,10	4							
2493,67	0,15	4	<i>u</i>				7	2493,71	-0,04
2491,67	0,15	3	<i>u</i>	7	2491,88	-0,21			
2479,85	0,15	4	<i>vR</i>	7	2480,15	-0,30			
2469,72	0,15	5	<i>vR</i>				7	2469,75	-0,03
2463,47	0,20	4	<i>su</i>	8	2463,86	-0,39			

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2457,72	0,25	6	<i>v R</i>	—	—	—	7	2458,24	-0,52
2449,76	0,25	6	—	—	—	—	8	2449,96	-0,20
2439,94	0,30	4	<i>su</i>	8	2440,63	-0,69			
2430,74	0,30	6	<i>u</i>	9	2431,21	—			
2427,05	0,30	6	<i>u</i>	8	2429,38	—			
2415,54	0,30	6	<i>su</i>	—	—	—	8	2426,83	+0,22
2407,98	0,30	6	<i>su</i>	9	2408,59	-0,61	8	2415,71	-0,17
—	—	—	—	9	2397,63	—			
2398,88	0,05	2							
2246,90	0,15	3							
(2188,3)	—								

Auch das Zink zeigt eine erste Nebenserie von Triplets, deren Linien stark, unscharf, leicht umkehrbar sind, und eine zweite Nebenserie, deren Linien schwächer, unscharf nur nach Roth sind; die Gleichungen derselben sind:

erste Nebenserie:

$$10^8 \lambda^{-1} = 42945,32 - 131641 n^{-2} - 1236125 n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 43331,71 - 131641 n^{-2} - 1236125 n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 43521,48 - 131641 n^{-2} - 1236125 n^{-4}.$$

zweite Nebenserie:

$$10^8 \lambda^{-1} = 42954,59 - 126919 n^{-2} - 632850 n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 43843,65 - 126919 n^{-2} - 632850 n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 43538,32 - 126919 n^{-2} - 632850 n^{-4}.$$

Die ersten möglichen Werthe ergeben sich wieder für $n = 3$; in der ersten Nebenserie findet man dafür die Wellenlängen 7658, 7438, 7335, welche noch nicht beobachtet sind, während das betreffende Triplet der zweiten Serie wieder um etwa 56 A.-E. grösser beobachtet ist. Beim ersten beobachteten Triplet, $n = 4$, der ersten Nebenserie ist, wie beim Ca, die erste Linie dreifach, die zweite doppelt; auch beim Triplet $n = 5$ sind die entsprechenden Linien doppelt.

Im Zinkspectrum finden sich noch zwei Triplets, welche nicht zu den Serien gehören. Das erste liegt dicht hinter dem Triplet $n = 5$ der ersten Serie und ist verbreitert nach Violett, das zweite liegt dicht hinter $n = 6$ der ersten Serie, ist unscharf nach beiden Seiten. Ihre Wellenlängen sind:

$$\left. \begin{array}{l} 2781,33 \\ 2751,49 \\ 2786,96 \end{array} \right\} \nu_1 = 389,9 \quad \left. \begin{array}{l} 2601,03 \\ 2575,15 \\ 2562,70 \end{array} \right\} \nu_1 = 386,4$$

$$\nu_3 = 192,9 \quad \nu_2 = 188,6.$$

Für die erste Nebenserie ist $\nu_1 = 386,4$, $\nu_2 = 189,8$,
 „ „ zweite Nebenserie $\nu_1 = 389,1$, $\nu_2 = 189,7$.

4) Strontium.

Wir haben im Strontiumspectrum eine grosse Zahl von Linien neu gefunden; ein Theil derselben ergänzt sich mit schon bekannten zu einer Serie von Triplets, welche wir als erste Nebenserie betrachten. Eine zweite Serie haben wir nicht finden können; da sie aber wesentlich schwächer sein müsste, als die erste, welche bei Sr auch nicht übermäßig stark ist, so hat das nichts auffallendes; auch bei der Gruppe der Alkalien haben wir ja bei den Elementen mit grösserem Atomgewicht nur die erste Nebenserie auffinden können.

Die Gleichungen der Serie lauten:

$$10^8 \lambda^{-1} = 31030,64 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 31424,67 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4},$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 31610,58 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}.$$

Für den ersten möglichen Werth, $n = 3$, ergibt sich: 14086, 13845, 13022. Beim ersten beobachteten Triplet, $n = 4$, ist wieder die erste Linie dreifach, die zweite doppelt; es musste hier die längste der dreifachen Linie genommen werden, um Uebereinstimmung mit den Schwingungsdifferenzen der übrigen nicht zur Serie gehörigen Triplets zu erzielen.

Für Sr ist $\nu_1 = 394,0$, $\nu_2 = 185,9$.

Im Spectrum finden sich noch zwei Triplets mit denselben Differenzen:

$$\begin{array}{l} 4438,22 \\ 4361,87 \\ 4326,60 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 394,4, \\ \nu_2 = 186,9, \\ \nu_3 = 187,0 \end{array} \right. \begin{array}{l} 3366,43 \\ 3322,32 \\ 3301,81 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 394,4, \\ \nu_2 = 187,0, \\ \nu_3 = 187,0 \end{array} \right.$$

Ferner finden sich mehrere Paare mit einer Differenz von nahezu $2\nu_1$ und solche mit ν_1 :

$$\begin{array}{lll} 5451,08(1) & 4305,60(3) & 4215,66(1h) \\ 5222,43(2) & 4161,95(3) & 4077,88(1h) \\ 6550,53(3) & 391,5; & 4812,01(1h) \\ 6386,74(3) & & 4722,42(2) \\ 3629,15(4) & 3504,70(5) & 3851,35(1h) \\ 3577,45(6) & 3456,78(6) & 3307,64(1h) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \begin{array}{l} 803,2; \\ 801,6; \\ 395,6; \\ 395,6; \\ 394,3. \end{array}$$

Endlich haben wir mehrere Triplets mit viel kleineren Schwingungsdifferenzen bemerkt:

$$\begin{array}{lll} 5535,01 & 5257,12 & \\ 5504,48 & 5229,52 & \left\{ \begin{array}{l} \nu_3 = 100,4, \\ \nu_4 = 59,8, \end{array} \right. \\ 5486,37 & 5213,23 & \\ 4892,20 & 4338,00 & \left\{ \begin{array}{l} \nu_3 = 99,3, \\ \nu_4 = 58,6. \end{array} \right. \\ 4868,92 & 4319,39 & \\ 4855,27 & 4308,49 & \end{array}$$

5) Cadmium.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5154,85	0,20	3	<i>vR</i>						
5086,06	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3	5018,23	+68
4800,09	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3	4739,55	+61
4678,37	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3	4620,90	+57
4662,69	0,10	2	<i>vR</i>						
4413,23	0,05	3							
4306,98	0,05	4	<i>v</i>						
3981,92	0,10	5	<i>vR</i>						
3729,21	0,20	4	<i>vR</i>						
3649,74	0,08	5	<i>vR</i>						
3614,58	0,10	4							
3613,04	0,05	2	<i>h</i>	4	3612,98	+0,06			
3610,66	0,08	1	<i>h</i>						
3595,64	0,10	6	<i>vR</i>						
3500,09	0,05	4	<i>vR</i>						
3467,76	0,03	2	<i>h</i>	4	3467,73	+0,08			
3466,33	0,03	1	<i>h</i>						
3403,74	0,03	1	<i>h</i>	4	3403,75	-0,01			
3299,11	0,03	4							
3261,17	0,03	1	<i>h</i>						
3252,63	0,05	2	<i>vR</i>	—	—	—	4	3252,62	+0,01
3133,29	0,20	2	<i>vR</i>	—	—	—	4	3133,21	+0,08
3081,03	0,10	3	<i>vR</i>	—	—	—	4	3080,91	+0,12
3005,53	0,20	6	<i>vR</i>						
2981,46	0,20	4	<i>h</i>						
2980,75	0,03	2	<i>h</i>	5	2980,94	-0,19			
2961,64	0,15	4	<i>vV</i>						
2908,85	0,50	6	<i>vR</i>						
2903,24	0,50	6	<i>u</i>						
2881,34	0,03	4	<i>h</i>	5	2881,36	-0,02			
2880,88	0,03	2	<i>h</i>						
2868,35	0,03	3	<i>vR</i>	—	—	—	5	2868,37	-0,02
2862,33	0,10	4	<i>vV</i>						
2837,01	0,03	2	<i>h</i>	5	2837,05	-0,04			
2818,66	0,10	5	<i>vV</i>						
2775,09	0,03	3	<i>vR</i>	—	—	—	5	2775,10	-0,01
2764,29	0,10	5	<i>h</i>						
2763,99	0,03	3	<i>h</i>	6	2763,43	+0,56			
2756,69	0,50	5							
2748,68	0,03	5	<i>vR</i>						
2733,97	0,05	4	<i>vR</i>	—	—	—	5	2733,99	-0,02
2712,65	0,05	3	<i>vR</i>	—	—	—	6	2712,62	+0,08
2677,65	0,20	2	<i>su</i>	6	2677,64	+0,01			
2670,81	0,50	5							
2660,45	0,20	4	<i>vR</i>	7	2660,08	+0,37			
2657,10	0,20	5	<i>vR</i>						
2654,65	0,20	6	<i>su</i>						
2639,63	0,10	3	<i>h</i>	6	2639,34	+0,29			
2632,29	0,10	5	<i>u</i>	—	—	—	7	2632,17	+0,12
2629,15	0,10	4	<i>uR</i>	—	—	—	6	2629,06	+0,09
2601,99	0,30	5	<i>su</i>	8	2602,10	-0,11			
2592,14	0,10	5	<i>uR</i>	—	—	—	6	2592,14	0,00
2582,86	0,30	6	<i>u</i>	—	—	—	8	2584,61	-1,75

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2580,33	0,10	5	su	7	2580,49	-0,16			
2578,12	0,10	4							
2553,61	0,20	5	u R	—	—	—	9	2553,95	-0,34
2544,84	0,20	5	u	7	2544,90	-0,06			
2525,57	0,50	6	su	8	2525,90	-0,33			
2521,74	0,50	6	su	—	—	—	7	2518,58	+3,16
2507,93	0,50	6	su	—	—	—	8	2508,64	-0,71
—	—	—		8	2491,79	—			
—	—	—		—	—	—	9	2479,74	—
2474,15	0,50	6	su	—	—	—	8	2475,00	-0,85
—	—	—		—	—	—	9	2446,87	—
2329,35	0,05	2	h						
2321,23	0,20	6							
2312,95	0,15	4							
2306,72	0,03	4	h						
2288,10	0,05	1	h, sehr breit						
2267,53	0,10	4	h						
2265,13	0,10	4	h						
2262,36	0,10	6							
2239,93	0,05	3	h						
2194,67	0,20	6							
2170,11	0,50	6							
2144,45	0,20	4	h						

Auch im Spectrum des Cd sind die beiden Tripletserien sehr deutlich; sie werden durch die Formeln dargestellt:
erste Nebenserie:

$$10^8 \lambda^{-1} = 40755,21 - 128635 n^{-2} - 1289619 n^{-4}$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 41914,60 - 128635 n^{-2} - 1289619 n^{-4}$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 42456,64 - 128635 n^{-2} - 1289619 n^{-4}$$

zweite Nebenserie:

$$10^8 \lambda^{-1} = 40797,12 - 126146 n^{-2} - 555137 n^{-4}$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 41968,80 - 126146 n^{-2} - 555137 n^{-4}$$

$$10^8 \lambda^{-1} = 42510,58 - 126146 n^{-2} - 555137 n^{-4}$$

Die ersten möglichen Werthe findet man wieder für $n = 3$; die erste Nebenserie ergibt für $n = 3$; die noch unbekannten Wellenlängen 9487, 8547, 8168; die Formeln der zweiten Nebenserie geben um etwa 60 A.-E. zu kleine Werthe.

Bei der ersten Nebenserie ist im Triplet $n = 4$, die erste Linie wieder dreifach, die zweite doppelt; beim Triplet $n = 5$ sind auch beide Linien enge Paare; beim Triplet $n = 6$ haben wir die erste Linie noch doppelt gemessen, die zweite

nur als doppelt erkannt. Es scheint danach wahrscheinlich, dass bei allen Triplets der ersten Nebenserien die erste und zweite Linie eine dreifache oder doppelte Linie ist, nur liegen ihre Componenten so nahe, dass unsere Dispersion sie nicht trennt.

Die Schwingungsdifferenzen beim Cd sind:

erste Nebenserien $\nu_1 = 1159,4$; $\nu_2 = 542,0$

zweite Nebenserien $\nu_1 = 1171,7$; $\nu_2 = 541,8$

Ausser den zu den Serien gehörigen Triplets finden sich noch drei andere:

$$\begin{array}{l} 2961,64 \\ 2862,33 \\ 2818,66 \end{array} \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 1171,5 \\ \nu_2 = 541,3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2756,69 \\ 2670,81 \\ 2632,29 \end{array} \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 1166,4 \\ \nu_2 = 547,9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2329,35 \\ 2267,53 \\ 2239,93 \end{array} \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 1170,4 \\ \nu_2 = 549,4 \end{array} \right\}$$

Das erste dieser Triplets ist verbreitert nach Violett und liegt dicht hinter dem Triplet 5 der ersten Nebenserien, das zweite ist unscharf nach beiden Seiten und liegt hinter $n = 6$, — ganz ebenso, wie es sich bei Zink fand. Ferner sind noch zwei Paare mit der Differenz ν_1 vorhanden.

$$\begin{array}{l} 3649,74 (5vR) \\ 3500,09 (4vR) \end{array} \left. \begin{array}{l} \nu_1 = 1171,5 \\ \nu_1 = 1172,3 \end{array} \right\}$$

6) Baryum.

1	2	3	4	1	2	3	4
6675,30	0,20	6		5784,24	0,15	5	<i>u</i>
6595,55	0,10	6		5777,84	0,03	1	<i>h</i>
6527,56	0,10	4		5721,66	0,30	6	<i>u</i>
6498,93	0,10	4		5713,62	0,15	4	<i>vR</i>
6497,07	0,10	3	<i>h</i>	5709,82	0,15	4	<i>vR</i>
6483,10	0,10	4		5680,34	0,05	3	<i>h</i>
6451,05	0,10	4		5620,41	0,50	5	<i>su</i>
6341,88	0,10	4		5593,45	0,10	4	<i>u</i>
6141,93	0,03	1	<i>h</i>	5585,69	0,05	1	<i>h</i>
6111,01	0,03	3		5519,37	0,05	2	<i>h</i>
6083,63	0,15	6		5473,94	0,10	4	<i>u</i>
6063,33	0,03	3		5437,66	0,10	5	<i>u</i>
6019,69	0,03	3		5424,82	0,05	2	<i>h</i>
5997,31	0,03	4		5393,47	0,10	6	<i>vR</i>
5978,72	0,20	6		5381,25	0,50	6	<i>vR</i>
5971,94	0,03	2		5379,05	1,00	6	<i>vR</i>
5965,06	0,20	5		5365,46	0,50	6	<i>vR</i>
5907,88	0,05	3		5309,20	0,30	5	<i>vR</i>
5853,91	0,10	1	<i>h</i>	5305,99	0,20	5	<i>vR</i>
5826,50	0,03	2	<i>h</i>	5302,97	0,20	4	<i>vR</i>
5819,21	0,05	4	<i>u</i>	5294,40	0,10	5	
5805,86	0,05	3	<i>h</i>	5291,16	0,20	6	<i>u</i>
5800,48	0,05	3	<i>h</i>	5279,72	0,20	6	<i>u</i>

1	2	3	4	1	2	3	4
5277,84	0,15	4	<i>su</i>	4085,35	0,50	6	<i>su</i>
5267,20	0,10	3	<i>su</i>	4079,56	0,50	6	<i>su</i>
5253,94	0,10	6	<i>su</i>	3995,92	0,10	3	
5171,60	0,05	5	<i>u</i>	3993,60	0,03	1	<i>h</i>
5175,74	0,05	4	<i>u</i>	3975,55	0,10	5	<i>v R</i>
5160,27	0,10	4	<i>u</i>	3938,09	0,05	3	
5055,12	0,10	5	<i>u</i>	3895,87	0,05	2	<i>h</i>
4947,50	0,10	5	<i>u</i>	3917,42	0,05	4	
4934,24	0,03	1	<i>h</i>	3910,04	0,05	2	<i>h</i>
4908,11	0,05	3	<i>v R</i>	3906,20	0,05	5	
4900,13	0,05	2		3900,54	0,05	4	<i>u</i>
4877,99	0,15	5	<i>su</i>	3892,93	0,10	5	<i>u</i>
4726,63	0,05	2	<i>h</i>	3891,97	0,05	3	<i>u</i>
4724,98	0,10	5		3889,45	0,05	4	
4700,64	0,05	3	<i>v R</i>	3881,87	0,15	5	<i>u</i>
4691,74	0,03	3	<i>h</i>	3794,77	0,20	5	<i>su</i>
4673,69	0,05	3	<i>v V</i>	3701,87	0,15	5	<i>u</i>
4642,38	0,10	6	<i>v R</i>	3689,28	0,15	5	<i>u</i>
4636,80	0,10	5	<i>v R</i>	3664,76	0,10	5	<i>u</i>
4628,45	0,05	4	<i>v V</i>	3662,62	0,05	3	
4620,19	0,05	4	<i>v R</i>	3637,10	0,50	6	<i>su</i>
4605,11	0,05	5	<i>v V</i>	3611,17	0,10	3	<i>v R</i>
4600,02	0,05	4	<i>v R</i>	3599,60	0,05	3	
4591,88	0,05	5	<i>v V</i>	3593,58	0,15	4	<i>v R</i>
4589,82	0,05	5	<i>v V</i>	3588,33	0,10	5	<i>u</i>
4579,84	0,03	2	<i>h</i>	3586,64	0,10	5	
4574,08	0,05	3	<i>h</i>	3579,97	0,10	4	<i>h, u</i>
4554,21	0,03	1	<i>h</i>	3577,79	0,05	4	<i>u</i>
4525,19	0,05	3		3576,20	0,10	6	
4523,48	0,10	3	<i>h</i>	3566,90	0,05	5	<i>u</i>
4506,11	0,10	3		3562,23	0,10	6	<i>u</i>
4493,82	0,20	4	<i>v V</i>	3548,14	0,05	5	<i>u</i>
4489,50	0,50	4	<i>v V</i>	3544,94	0,10	3	<i>h, u</i>
4467,36	0,05	4		3525,23	0,10	3	<i>h, u</i>
4432,13	0,03	3	<i>h</i>	3501,29	0,05	1	<i>h</i>
4413,96	0,05	5		3420,48	0,10	4	<i>h</i>
4407,10	0,05	4	<i>v R</i>	3377,19	0,10	4	<i>h, v R</i>
4402,75	0,05	2	<i>h</i>	3357,00	0,10	3	<i>h, v R</i>
4359,80	0,05	5		3323,06	0,10	4	<i>v R</i>
4350,49	0,10	2	<i>h</i>	3315,90	0,10	5	<i>u</i>
4333,04	0,05	4	<i>u</i>	3298,25	0,10	4	<i>v R</i>
4325,38	0,05	5		3281,96	0,10	4	<i>v R</i>
4323,15	0,05	4	<i>v V</i>	3262,57	0,10	5	<i>v R</i>
4291,32	0,05	4		3223,11	0,20	6	<i>su</i>
4283,27	0,03	2	<i>h</i>	3204,09	0,20	6	<i>su</i>
4264,45	0,05	4	<i>u</i>	3184,45	0,30	6	<i>su</i>
4242,83	0,05	4	<i>v R</i>	3119,48	0,50	6	<i>su</i>
4239,91	0,05	5		3108,37	0,50	5	<i>u</i>
4224,11	0,05	4		3071,71	0,03	3	<i>h</i>
4179,57	0,20	5	<i>v R</i>	2785,22	0,15	2	<i>u</i>
4166,24	0,05	4		2771,51	0,10	3	
4132,60	0,05	5		2702,78	0,03	4	<i>h</i>
4130,88	0,05	2	<i>h</i>	2647,41	0,05	4	
4110,46	0,10	5		2641,52	0,05	4	
4087,90	0,50	6	<i>su</i>	2634,91	0,05	2	

1	2	3	4
2596,99	0,05	4	<i>h</i>
2347,67	0,05	8	
2335,33	0,05	2	<i>h</i>
2304,82	0,05	2	<i>h</i>
2254,80	0,10	4	
2245,72	0,10	4	
2216,64	0,10	6	

Das Spectrum des Ba war bisher nur sehr wenig bekannt; von den 162 Linien, die wir in vorstehender Liste führen, sind 86 zum ersten Mal beobachtet. Trotzdem ist es uns nicht gelungen, im Spectrum Tripletserien zu finden. Es sind zwar einzelne auffallende Triplets vorhanden, natürlich:

$$\left. \begin{array}{l} 3420,48 \\ 3377,19 \\ 3357,00 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 374,8 \\ \nu_2 = 178,1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 3323,06 \\ 3281,96 \\ 3262,57 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 367,6 \\ \nu_2 = 190,4, \\ \quad \quad \quad \end{array}$$

wozu vielleicht, wenn man 3262,57 als doppelt auffasst, was möglich wäre, noch kommt:

$$\left. \begin{array}{l} 3262,57 \\ 3223,11 \\ 3204,09 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nu_1 = 375,5 \\ \nu_2 = 184,2. \end{array}$$

Wenn diese Triplets eine Serie bildeten, würden ihnen die Ordnungszahlen 7, 8, 9 zukommen; aber die Triplets, welche $n = 4, 5, 6$ entsprächen, finden sich gar nicht, oder unvollkommen. Auch sollte man nach dem Atomgewicht des Ba erwarten (siehe weiter unten), dass es Triplets mit etwa $\nu_1 = 800, \nu_2 = 400$ habe. Wir haben auch einzelne Triplets mit solchen Schwingungsdifferenzen gefunden, aber keine Serie derselben.

7) Quecksilber.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5819,05	0,50	6	<i>u</i>						
5804,28	0,30	5	<i>v R</i>						
5790,49	0,20	1	<i>h</i>						
5769,45	0,20	1	<i>h</i>						
5460,97	0,05	1	<i>h</i>	—	—	—	3	5374,42	+87
5365,25	1,00	6	<i>su</i>						
4959,74	0,50	5	<i>v R</i>						
4916,41	0,10	3	<i>v R</i>				3	4302,98	+56
4358,56	0,03	1	<i>h</i>	—	—	—			

26*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4347,65	0,10	3	<i>v R</i>						
4339,47	0,10	4	<i>v R</i>						
4078,05	0,08	2	<i>h</i>						
4046,78	0,08	3	<i>h</i>	—	—	—	3	3998,86	+48
3984,08	0,05	4							
3908,4	2,00	6	<i>su</i>						
3820,6	0,50	6	<i>su</i>						
3790,36	0,50	5	<i>su</i>						
3770,71	0,50	5	<i>su</i>						
3751,83	0,05	4	<i>v</i>						
3680,74	0,20	4	<i>v R</i>						
3663,25	0,05	3	<i>h</i>	4	3663,20	+0,05			
3654,94	0,05	3	<i>h</i>						
3650,81	0,08	1	<i>h</i>						
3561,53	0,10	4	<i>u</i>						
3543,65	0,10	4	<i>u</i>						
3390,50	0,50	3	<i>su</i>						
3367,08	0,50	6	<i>su</i>						
3351,52	0,10	4	<i>v V</i>						
3341,70	0,05	3	<i>v R</i>	—	—	—	4	3341,71	-0,01
3305,28	0,20	6	<i>v R</i>						
3264,33	0,20	6							
3144,61	0,10	5	<i>v R</i>						
3135,89	0,20	5	<i>u</i>						
3131,94	0,08	2	<i>h</i>						
3131,68	0,08	2	<i>h</i>	4	3131,68	0,00			
3125,78	0,05	1	<i>h</i>						
3095,35	0,20	6	<i>u</i>						
3085,41	1,00	6	<i>su</i>						
3050,58	0,50	6	<i>su</i>						
3088,69	0,15	4	<i>v R</i>						
3027,62	0,15	5	<i>v R</i>						
3023,71	0,20	5	<i>u</i>	5	3023,18	-1,47			
3021,64	0,05	4	<i>h</i>						
3011,17	0,25	6	<i>su</i>						
3007,02	0,15	5	<i>v V</i>						
2967,37	0,10	1	<i>h</i>	4	2967,39	-0,02			
2925,51	0,10	2	<i>v R</i>	—	—	—	5	2925,49	+0,02
2893,67	0,05	3	<i>v R</i>	—	—	—	4	2893,70	-0,03
2865,14	0,25	6	<i>su</i>						
2857,07	0,10	4	<i>v R</i>						
2847,85	0,10	4	<i>u</i>						
2835,26	0,25	6	<i>su</i>						
2819,97	0,10	4	<i>su</i>						
2803,69	0,20	4	<i>v R</i>	6	2804,91	-1,22			
2799,76	0,20	6	<i>su</i>						
2774,68	0,20	4	<i>su</i>						
2759,83	0,05	3	<i>v R</i>	—	—	—	6	2759,78	+0,05
2752,91	0,08	2	<i>v R</i>	—	—	—	4	2752,90	+0,01
2699,74	0,40	5	<i>v R</i>	7	2700,06	-0,32			
2686,61	0,20	5	<i>u</i>						
2675,20	0,20	6	<i>su</i>	—	—	—	7	2674,96	+0,24
2672,77	0,20	6	<i>su</i>						
2660,26	0,20	6	<i>su</i>						
2658,59	0,20	6	<i>su</i>						

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2655,29	0,08	3	<i>h</i>						
2653,89	0,05	3	<i>h</i>	5	2653,28	+0,61			
2652,20	0,05	2	<i>h</i>						
2648,12	0,20	6	<i>su</i>						
2642,70	0,10	3	<i>v V</i>						
2609,73	0,20	6	<i>u</i>						
2605,29	0,10	5	<i>u</i>						
2576,31	0,10	2	<i>v R</i>	—	—	—	5	2576,90	+0,01
2564,14	0,10	6							
2540,39	0,10	5	<i>h</i>						
2536,72	0,20	1	<i>h</i> , sehr breit						
2534,89	0,05	2	<i>h</i>	5	2534,40	+0,49			
2524,80	0,10	5	<i>v R</i>						
2505,00	0,50	6	<i>su</i>						
2482,14	0,20	4	<i>u</i>	6	2482,31	-0,17			
2478,09	0,50	5	<i>su</i>						
2464,15	0,05	3	<i>v R</i>	—	—	—	5	2464,10	+0,05
2446,96	0,10	3	<i>v R</i>	—	—	—	6	2446,92	+0,04
2412,31	0,10	4	<i>v R</i>						
2399,64	0,20	4	<i>u</i>	7	2399,84	-0,20			
2378,40	0,15	3	<i>v R</i>	6	2377,95	+0,45			
2374,10	0,50	5	<i>su</i>						
2345,41	0,05	4	<i>v R</i>	—	—	—	6	2345,48	-0,07
2301,57	1,00	6	<i>v R</i>	7	2302,17	-0,60			
2262,23	0,15	4							
2260,36	0,15	4							
2252,87	0,15	5							
2224,73	0,20	4							

Die beiden Tripletserien des Quecksilbers werden durch die Formeln dargestellt:

erste Nebenserie:

$$10^9 \lambda^{-1} = 40159,60 - 127\,484\,n^{-2} - 1\,252\,695\,n^{-4},$$

$$10^9 \lambda^{-1} = 44792,87 - 127\,484\,n^{-2} - 1\,252\,695\,n^{-4},$$

$$10^9 \lambda^{-1} = 46560,78 - 127\,484\,n^{-2} - 1\,252\,695\,n^{-4},$$

zweite Nebenserie:

$$10^9 \lambda^{-1} = 40217,98 - 126\,361\,n^{-2} - 613\,268\,n^{-4},$$

$$10^9 \lambda^{-1} = 44851,01 - 126\,361\,n^{-2} - 613\,268\,n^{-4},$$

$$10^9 \lambda^{-1} = 46618,44 - 126\,361\,n^{-2} - 613\,268\,n^{-4}.$$

Dieselben geben für $n = 3$ wieder die ersten möglichen Werthe, und zwar für die erste Nebenserie: 9497, 6595, 5906; vielleicht ist die von anderen beobachtete starke Linie 6152 die dritte derselben. Die Triplets $n = 4$ und $n = 5$ der ersten Nebenserie haben wieder mehrfache Linien.

Für die erste Nebenserie ist: $v_1 = 4633,3$, $v_2 = 1767,9$,
 " " zweite " " $v_1 = 4633,0$, $v_2 = 1767,4$.

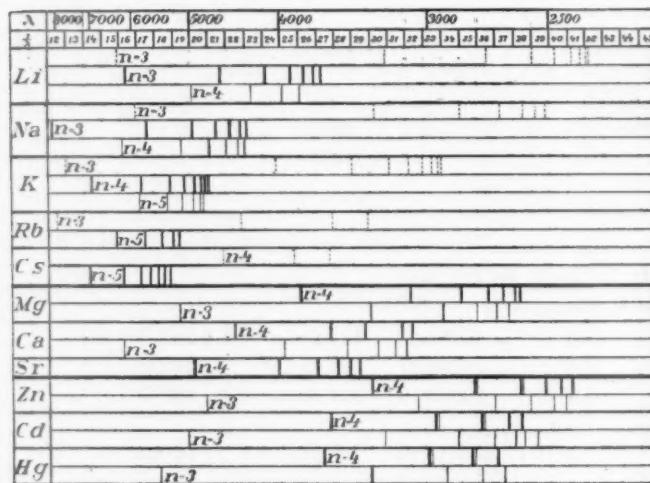
Hinter dem Triplet $n = 5$ der ersten Serie liegt wieder ein nach Violett verbreitetes Triplet, hinter $n = 6$ ein nach beiden Seiten unscharfes:

$$\left. \begin{array}{l} 3007,02 \\ 2642,70 \\ 2524,80 \end{array} \right\} \nu_1 = 4584,6 \quad \left. \begin{array}{l} 2799,76 \\ 2478,09 \\ 2374,10 \end{array} \right\} \nu_1 = 4636,3 \\ \nu_2 = 1767,0 \quad \nu_2 = 1767,6.$$

Ferner haben wir eine Reihe von Linienpaaren mit der Schwingungsdifferenz ν_1 bemerkt:

$$\begin{array}{l} 3680,74 \text{ (4 R)} \quad 4631,8 \quad 3305,23 \text{ (6 R)} \quad 4647,2 \quad 3264,33 \text{ (6)} \quad 4636,0 \\ 3144,61 \text{ (5 R)} \quad \quad \quad 2865,14 \text{ (6 u)} \quad \quad \quad 2835,26 \text{ (6)} \quad \quad \quad \\ 3085,41 \text{ (6 u)} \quad 4630,0 \quad 2835,26 \text{ (6 u)} \quad 4650,0 \quad 2672,77 \text{ (6 u)} \quad 4630,7 \\ 2699,74 \text{ (5 R)} \quad \quad \quad 2505,00 \text{ (6 u)} \quad \quad \quad 2378,40 \text{ (3 R)} \end{array}$$

Um die Veränderung von einem Spectrum zum andern zu erkennen, haben wir in der Figur die Serien nach dem Maassstab der Schwingungszahlen gezeichnet. Der Voll-



ständigkeit halber sind auch die Alkalien nach unserer früheren Untersuchung herangezogen. Dabei ist von jeder Spectralgruppe, Paar oder Triplet, stets nur die erste Linie eingetragen, um nicht das Bild zu unklar zu machen. Bei den Alkalien ist in der ersten Linie die Hauptserie mit punktierten Strichen gezeichnet, dann folgt die erste Nebenserie mit dickem, dann die zweite mit dünnem Strich; ebenso ist bei den anderen Elementen die erste Nebenserie dicker,

die zweite dünner gezeichnet. Die Figur zeigt auf den ersten Blick, dass die untersuchten Elemente in drei Gruppen zerfallen: die Alkalien, die Gruppe des Magnesium, die Gruppe des Zinks. In jeder Gruppe rücken mit wachsendem Atomgewicht die Serien nach dem rothen Ende des Spectrums.

Diese Verschiebung spricht sich in unserer Formel $10^8 \lambda^{-1} = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}$ darin aus, dass die Constante A , welche ja die Schwingungszahl der letzten Linie (für $n = \infty$) ist, allmählich abnimmt. Dass auch die anderen Constanten sich gesetzmässig ändern, geht aus folgender Zusammenstellung derselben hervor.

	Erste Nebenserien			Zweite Nebenserien		
	A	B	C	A	B	C
Mg	39796,10	180 398	1 432 090	39836,74	125 471	518 781
Ca	33919,51	123 547	961 696	34041,17	120 398	346 097
Sr	31080,64	122 328	887 473	—	—	—
Zn	42945,32	131 641	1 236 125	42954,59	126 919	532 850
Cd	40755,21	128 635	1 289 619	40797,12	126 146	555 187
Hg	40159,60	127 484	1 252 695	40217,98	126 361	613 268

Diese Tabelle zeigt ferner, dass die mittlere Constante B sich sehr wenig ändert, nur zwischen 120 und 132 schwankt; bei den Alkalien lag sie zwischen 110 und 122.

Bei den Alkalien hatten wir das wichtige Gesetz gefunden, dass die constante Schwingungsdifferenz der Paare fast genau proportional dem Quadrat des Atomgewichtes sei; Rydberg fand dasselbe Gesetz, gibt aber an, dass in jeder Gruppe des Mendelejeff'schen Systems die Schwingungsdifferenz etwas schneller wachse, als das Quadrat des Atomgewichts. Die folgende Tabelle zeigt unsere Resultate:

	ν_1	ν_2	$\frac{\nu_1}{\nu_2}$	$\frac{\nu_1}{(\text{Atomgew.})^2}$	$\frac{\nu_2}{(\text{Atomgew.})^2}$
Mg	40,7	20,2	2,01	713	354
	41,2	20,0	2,07	722	350
Ca	101,6	51,7	1,97	638	325
	105,8	52,7	2,03	664	327
Sr	394,0	185,9	2,12	517	244
Zn	386,4	189,8	2,036	918	451
	389,1	189,7	2,051	924	451
Cd	1159,4	542,0	2,139	929	434
	1171,7	541,8	2,163	939	433
Hg	4633,3	1767,9	2,621	1161	443
	4633,0	1767,4	2,621	1161	443

Die Tabelle zeigt, dass die Verhältnisse hier nicht so einfach sind, wie bei den Alkalien, dass aber die Rydberg'sche Bemerkung nicht angenähert richtig ist. Man muss vielmehr auch hier die beiden Gruppen des Mg und des Zn unterscheiden; in der ersten nimmt der Quotient ab, in der zweiten wächst er mit wachsendem Atomgewicht. Nimmt man ν_2 statt ν_1 , so ist in der zweiten Gruppe der Quotient nahezu constant, in der ersten nimmt er ab.

Die Tabelle zeigt ferner, dass der Quotient ν_1/ν_2 bei allen Elementen der zweiten Mendeleeff'schen Gruppe nahezu = 2 ist, nur für Hg gleich 2,6. Ferner sieht man, dass ν_1 für die beiden Serien nicht identisch ist, sondern, mit Ausnahme von Hg, stets für die zweite Nebenserie etwas grösser. Bei ν_2 fallen die Differenzen innerhalb der Beobachtungsfehler.

Für die drei Elemente Zn, Cd, Hg sind noch weitere Aehnlichkeiten ausser den Serien zu erwähnen: jedes der Elemente zeigt ein Triplet, welches unscharf nach Violett ist und etwas kleinere Wellenlänge besitzt, als das Triplet 5 der ersten Serie, und ein Triplet, welches unscharf nach beiden Seiten ist und dicht unter dem Triplet 6 der ersten Serie liegt. Auch diese Triplets sind in die Tafel eingetragen mit schwacher Linie in der Reihe für die erste Nebenserie. Endlich besitzt jedes der Elemente im äussersten Ultraviolett eine ausserordentlich stark verbreiterte umgekehrte Linie in ähnlicher Lage gegen die Serien. Durch eine solche unverhältnismässig starke Linie, allerdings in anderer Lage, bei 2852, wird Mg an die Gruppe des Zn angeschlossen. Vielleicht auch haben wir in diesen Linien den Anfang einer Hauptserie dieser Elemente zu sehen, welche dann noch weiter im Ultraviolett verlaufen würde.¹⁾

Schliesslich sei noch folgende Bemerkung gemacht, welche allerdings provisorischer Natur ist: Trägt man die Atomgewichte der Elemente als Abscissen auf der x -Axe auf, die erste Constante A , welche die wichtigste ist, insofern sie die Lage der Serien im Spectrum bestimmt, als

1) Schumann (Chem. News. 62. p. 299. 1890) hat kürzlich bei vielen Elementen noch weit kürzere Wellen photographiren können.

Ordinate, so liegen die zu einer Familie von Elementen (Alkalien, Mg, Zn) gehörenden Punkte auf einer Kurve, welche mit wachsendem Atomgewicht sich der x -Axe nähert und ihr parallel wird. Trägt man dagegen die Größen $1/A$, also die kleinste Wellenlänge der Triplets für alle Elemente als Ordinaten auf, so geben sie eine periodisch auf- und abschwankende Curve, welche dieselbe Gestalt zu haben scheint, wie die Curve, welche die Atomvolumina als Function des Atomgewichts darstellt. (Siehe Meyer, Moderne Theorien der Chemie.) Die Zahl der von uns untersuchten Elemente ist aber noch zu gering, als dass wir über den wirklichen Verlauf der Curve Sicheres aussagen könnten.

Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit ist uns die ausführliche Abhandlung von Rydberg¹⁾ zugegangen, welche wir bis dahin nur aus Auszügen kannten. Wir wollen indessen hier die Besprechung seiner Resultate nicht wiederholen, sondern verweisen auf unsere Nachschrift in den Abhandl. der Berl. Acad. 1891.

Hannover, April 1891.

1) Rydberg, Kongl. Swensk. Vetensk. Acad. Handl. 23. Nr. 11. 1890.

X. Zur Theorie des Lichtes; von W. Voigt.

In einer Reihe von in den Jahren 1883 bis 1886 veröffentlichten Abhandlungen habe ich versucht, eine Zusammenstellung und Anwendung aller innerhalb eines aus Aether und Materie gemischten Körpers möglichen Kräfte zu geben, welche die Energie einer darin fortgepflanzten Bewegung entweder unter allen Umständen erhalten oder unter allen Umständen vermindern — und zwar im allgemeinen unter der Beschränkung, dass die Excursionen der ponderablen Theile verschwindend klein gegen diejenigen der Aethertheilchen, und dass die wirkenden Kräfte lineäre Functionen dieser Excursionen sind. Die so gefundenen allgemeinen Gesetze der Kräfte, welche der Aether erfährt, gestatteten, wenn man sie mit der Annahme verbindet, dass beim Uebergang einer Bewegung durch die Grenze zweier Medien, d. h. in einer unendlich dünnen Schicht längs der Grenze, niemals ein endlicher Betrag von Energie verloren geht, Gesetze für die Fortpflanzung von Oscillationen abzuleiten, welche mit den für die Fortpflanzung von Lichtschwingungen in isotropen und nichtisotropen, absorbirenden und nichtabsorbirenden Körpern gültigen gemäss der Beobachtung vollständig übereinstimmen.

Wenn ich mich anschicke, im Folgenden eine Ergänzung dieser Betrachtungen zu geben, so liegt mir zunächst ob, die Frage zu beantworten, in wie weit die von mir angewandte Betrachtungsweise noch einen Nutzen besitzt und also ein Interesse verdient, nachdem durch die Beobachtungen des Hrn. Hertz die Identität der Lichtschwingungen mit gewissen electrischen Erscheinungen so äusserst wahrscheinlich gemacht ist.

Dazu weise ich darauf hin, dass die von mir gewählte Fragestellung eine so allgemeine ist, dass sie keinerlei Beschränkung weder über die Natur des schwingenden Mediums, noch über den Ursprung der wirkenden Kräfte enthält, dass

also z. B. Nichts daran hindert, letztere als electrische zu betrachten.

Auch die Voraussetzung der Incompressibilität des Aethers ist nur als ein Ausdruck der Erfahrung zu betrachten, *dass bei den Lichtschwingungen eine Compression nicht zu Stande kommt*; und es macht für die analytische Formulirung keinen Unterschied, ob diese Erscheinung durch eine dem Aether individuelle Eigenschaft oder aber durch die Natur der z. B. von den ponderablen Theilen auf ihn ausgeübten Kräfte bedingt ist. Durch diese Ueberlegung werden auch alle Einwände gegen die mechanische Betrachtungsweise, welche an die Nichtvorstellbarkeit eines „festen“ den ganzen Weltraum erfüllenden Körpers knüpfen, von vorn herein als hinfällig erwiesen.

Es ist der Vorzug grösster Allgemeinheit, der mich veranlasst hat, für die Behandlung der optischen Phänomene diesen gewissermaassen mathematischen Standpunkt einzunehmen, obgleich ich mir von allem Anfang an darüber klar gewesen bin, dass derselbe manche specielle Frage, die zur Erledigung eine bestimmte physikalische Vorstellung erfordert, unbeantwortet lassen muss. Aber die Unmöglichkeit, die meisten der zur Erklärung ehemal gemachten Hypothesen auf noch andere Weise zu prüfen, als an eben den Erscheinungen, die zu erklären sie ersonnen sind, liess es mir lohnend erscheinen, einen Weg einzuschlagen, der von unanfechtbaren mechanischen Grundsätzen ausgehend sich zugleich specieller Voraussetzungen nach Möglichkeit enthält.

Dieser Weg gewinnt meines Erachtens besonders an Bedeutung in denjenigen Gebieten, in welchen man mit der einfachen Uebertragung der für electrische Schwingungen in ponderablen Leitern und Nichtleitern erwiesenen Gesetze auf die Lichtschwingungen nicht mehr auskommt und wo man die Einwirkung der ponderablen Theile auf den Aether heranziehen muss. Denn hier wird man, wenn anders der „physikalische“ Standpunkt gewahrt werden soll, mit Nothwendigkeit zu sehr speciellen Vorstellungen über den Mechanismus dieser Wechselwirkungen gedrängt, bei deren Ausbildung das Streben nach Einfachheit der Annahmen im Interesse der Möglichkeit einer theoretischen Behandlung mit der Wahrscheinlichkeit

derselben nur zu leicht in Conflict kommt. Natürlich ist es jederzeit von hohem Interesse, durch theoretische Verfolgung einer solchen Vorstellung und Vergleichung der Resultate mit der Beobachtung Aufklärung über die Zulässigkeit der gemachten Voraussetzungen zu erhalten; aber um zum ersten Male die Gesetze für irgend einen Bereich von Erscheinungen abzuleiten, scheint mir der von mir gewählte Weg ungleich sicherer und kürzer.

Und selbst wenn es einmal gelingen sollte, alle optischen Erscheinungen durch einfache Uebertragung völlig sicherstellter electrischer und magnetischer Gesetze zu erklären, dürfte der Nachweis, dass die Endformeln von ganz anderer Seite her übereinstimmend mit der Beobachtung gewonnen werden können, noch ein gewisses Interesse besitzen, um so mehr, als früher oder später ohne Zweifel die Aufgabe in Angriff genommen werden wird, ebenso wie man jetzt Probleme, die früher als mechanische behandelt wurden, als electrische betrachtet, umgekehrt die electrischen Vorgänge mechanisch zu erklären.

Aus allen diesen Gründen schien es mir nicht ganz überflüssig, auf dem von mir ehemel gewählten mehr mathematischen Wege noch weitere Resultate zu erstreben. Die nachstehenden Entwickelungen enthalten von dergleichen Folgendes.

In dem I. Abschnitt wird durch Beseitigung einer früher gemachten unnöthig beschränkenden Annahme eine allgemeinere Form der anzunehmenden Kräfte gewonnen, welche die Eigenschaft hat, für die Gesetze der Dispersion höchst allgemeine Gestalten zu ergeben. Im II. Abschnitt werden diese allgemeinen Kräfte der Bedingung unterworfen, dass sie unter keinen Umständen eine Compression innerhalb des Aethers hervorrufen und dadurch in überraschender Weise vereinfacht und specialisirt. Im III. Abschnitt werden die allgemeinen Grenzbedingungen entwickelt, im IV. der Zusammenhang dargelegt, welcher zwischen den Hauptgleichungen nach der Fresnel'schen und Neumann'schen Anschaung besteht und schliesslich eine Vergleichung der Resultate der Entwicklung der ersten drei Abschnitte mit denen der electrischen Theorie durchgeführt.

I. Wir wenden uns zunächst zur Entwicklung der allgemeinsten Ausdrücke, welche sich für die Kräfte, die der Aether innerhalb eines ponderablen Körpers erfährt, ergeben, wenn wir die Forderung aufstellen, dass sie unter allen Umständen die Energie fortgepflanzter Verrückungen ungeändert erhalten sollen. Solange die Excursionen der ponderablen Theile klein gegen diejenigen des Aethers angenommen werden, kann man die innern Kräfte des Aethers und die von den ponderablen Theilen ausgeübten in die eine Bezeichnung (A), (B), (Γ) zusammenfassen.

Diese Componenten zerlegen wir in Theile $A_1, A_2 \dots$ von der Form:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} + A_1 = A, \\ - A_2 = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ + A_3 = \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial x \partial y} + \dots, \\ \dots \end{array} \right.$$

und bringen die Arbeit S dieser Kräfte während der Zeit-einheit durch mehrfache theilweise Integration auf die Form eines Raum- und eines Oberflächenintegrals:

$$(2) \quad S = J_k + J_0,$$

wobei ersteres die Form hat:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_k = \int dk (A u' + B v' + \Gamma w') \\ + \int dk \left(A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + A_z \frac{\partial u'}{\partial z} + \dots \right) \\ + \int dk \left(A_{xx} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \dots \right) \\ + \dots \end{array} \right.$$

Sollen innerhalb desselben Mediums verschiedene Wellen sich einfach superponiren, so müssen die $A, A_x, A_{xx} \dots$ lineare Function der Verrückungen u, v, w und ihrer Differentialquotienten sein.

Erreicht die Bewegung noch nirgends die Oberfläche des betrachteten Mediums, so verschwindet J_0 und es bleibt $S = J_k$. Die Kräfte haben den Charakter der die Energie erhaltenden, wenn S die Form eines vollständigen Differential-

quotienten nach der Zeit hat von einer Function, die in jedem Moment nur von der augenblicklichen Configuration des Systems abhängt, d. h. also, wenn die zu integrirenden Functionen die gleiche Eigenschaft haben.

Es ist ohne Weiteres klar, dass die

$$\begin{aligned} A, \dots & \text{ nur Glieder der Form } \frac{\partial^h u}{\partial t^h}, \dots \\ A_x, \dots & \text{ " " " } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^h u}{\partial t^h} \right), \dots \\ A_{xx}, \dots & \text{ " " " } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^h u}{\partial t^h} \right), \dots \end{aligned}$$

enthalten können, und die Frage nach den allgemeinsten die Energie erhaltenden Kräften kommt hinaus auf die, *unter welchen Bedingungen ein Aggregat von Gliedern der Form $\partial^h \varphi / \partial t^h \cdot \partial \psi / \partial t$ ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein kann.*

Die Bedingung hierfür habe ich früher zu eng gefasst und habe gemeint, es könnten höhere als dritte Differentialquotienten nach der Zeit nicht auftreten; vor einiger Zeit bin ich gelegentlich der Wiederdurchsicht der früheren Publicationen darauf aufmerksam geworden, dass diese Beschränkung nicht nötig ist. Die hierdurch zu gewinnende Verallgemeinerung meiner Formeln ist der erste Gegenstand dieser Mittheilung.

Setzt man abgekürzt:

$$\frac{\partial^h \varphi}{\partial t^h} = \varphi^h,$$

so erhält man durch theilweise Integration leicht die Formel:

$$\begin{aligned} \int \varphi' \psi^k dt &= \varphi' \psi^{k-1} - \varphi'' \psi^{k-2} \pm \dots \\ &\quad + (-1)^k \varphi^{k-1} \psi' - (-1)^k \int \varphi^k \psi' dt \end{aligned}$$

oder:

$$(4) \quad \begin{cases} \int (\varphi' \psi^k + (-1)^k \varphi^k \psi') dt = \varphi' \psi^{k-1} - \varphi'' \psi^{k-2} \pm \dots \\ \quad + (-1)^k \varphi^{k-1} \psi'. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass ein Aggregat von der Form:

$$\varphi' \psi^k + (-1)^k \varphi^k \psi'$$

stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist.

Eine Beschränkung auf $k \leq 3$ ergibt sich nur, wenn man die Voraussetzung macht, dass die zu differentiirende Function (im Falle der Arbeit S das Potential der wirkenden Kräfte) lauter Glieder mit gleichen Differentialquotienten enthält, — eine Voraussetzung, die ich früher stillschweigend, aber ohne Grund, nach Analogie des Potentiales der elastischen Kräfte gemacht hatte.

Für die Anwendung unterscheiden wir vier wichtige specielle Fälle.

I. k sei eine gerade Zahl $= 2n$.

1. Ist dann noch $\varphi = \psi$, so ergibt sich:

$$\varphi' \varphi^{2n} = \frac{d}{dt} \left(\varphi' \varphi^{2n-1} - \varphi'' \varphi^{2n-2} \pm \dots - \frac{(-1)^n}{2} \varphi^n \varphi^0 \right);$$

das Product $\varphi' \varphi^{2n}$ ist also stets ein Differentialquotient nach der Zeit.

2. Ist φ nicht gleich ψ , so ist:

$$\varphi' \psi^{2n} + \psi' \varphi^{2n} = \frac{d}{dt} (\varphi' \psi^{2n-1} - \varphi'' \psi^{2n-2} \pm \dots + \varphi^{2n-1} \psi');$$

das Aggregat $\varphi' \psi^{2n} + \psi' \varphi^{2n}$ ist also ebenfalls stets ein Differentialquotient nach der Zeit.

II. k sei eine ungerade Zahl, $= 2n+1$.

3. Ist dann $\varphi = \psi$, so verschwindet in (4) das Integral links, $\varphi' \varphi^{2n+1}$ ist also kein Differentialquotient nach der Zeit.

4) Ist aber φ nicht gleich ψ , so folgt aus (4):

$$\varphi' \psi^{2n+1} - \psi' \varphi^{2n+1} = \frac{d}{dt} (\varphi' \psi^{2n} - \varphi'' \psi^{2n-1} \pm \dots - \varphi^{2n} \psi');$$

das Aggregat $\varphi' \psi^{2n+1} - \psi' \varphi^{2n+1}$ ist also wiederum ein Differentialquotient nach der Zeit.

Hieraus erschliesst man leicht folgende Regeln über die Gesetze der allgemeinen die Energie erhaltenden Kräfte.

Kräfte erster Art, proportional mit geraden Differentialquotienten nach der Zeit.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{(2n)} = \alpha_{11}^{(2n)} u^{2n} + \alpha_{12}^{(2n)} v^{2n} + \alpha_{13}^{(2n)} w^{2n}, \\ B^{(2n)} = \alpha_{21}^{(2n)} u^{2n} + \alpha_{22}^{(2n)} v^{2n} + \alpha_{23}^{(2n)} w^{2n}, \\ C^{(2n)} = \alpha_{31}^{(2n)} u^{2n} + \alpha_{32}^{(2n)} v^{2n} + \alpha_{33}^{(2n)} w^{2n}, \\ \alpha_{hk}^{(2n)} = \alpha_{kh}^{(2n)}; \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A_x^{(2n)} = a_{11}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial x} + a_{12}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial y} + a_{13}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial z} + \dots, \\ -A_y^{(2n)} = a_{21}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial x} + a_{22}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial y} + a_{23}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial z} + \dots, \\ -A_z^{(2n)} = a_{31}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial x} + a_{32}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial y} + a_{33}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial z} + \dots, \\ -B_x^{(2n)} = a_{41}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial x} + a_{42}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial y} + a_{43}^{(2n)} \frac{\partial u^{2n}}{\partial z} + \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{hk}^{(2n)} = a_{kh}^{(2n)}; \end{array} \right.$$

ebenso weiter.

Kräfte zweiter Art, proportional mit ungeraden Ableitungen nach der Zeit.

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{(2n+1)} = \beta_{12}^{(2n+1)} v^{2n+1} + \beta_{13}^{(2n+1)} w^{2n+1}, \\ B^{(2n+1)} = \beta_{21}^{(2n+1)} u^{2n+1} + \beta_{23}^{(2n+1)} w^{2n+1}, \\ \Gamma^{(2n+1)} = \beta_{31}^{(2n+1)} u^{2n+1} + \beta_{32}^{(2n+1)} v^{2n+1} \\ \beta_{hk}^{(2n+1)} = 0, \quad \beta_{hk}^{(2n+1)} = -\beta_{kh}^{(2n+1)}; \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A_x^{(2n+1)} = b_{12}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial y} + b_{13}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial z} + \dots, \\ -A_y^{(2n+1)} = b_{21}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial x} + b_{23}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial z} + \dots, \\ -A_z^{(2n+1)} = b_{31}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial x} + b_{32}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial y} + \dots, \\ -B_x^{(2n+1)} = b_{41}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial x} + b_{42}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial y} + b_{43}^{(2n+1)} \frac{\partial u^{2n+1}}{\partial z} + \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{hk}^{(2n+1)} = 0, \quad b_{hk}^{(2n+1)} = -b_{kh}^{(2n+1)}; \end{array} \right.$$

ebenso weiter.

Bei der Anwendung der vorstehenden Werthe auf die Optik kommen nur periodische Funktionen der Zeit für u, v, w in Betracht. Setzt man also:

$$u^{2n} = (-1)^n \frac{u}{i^{2n}},$$

wo $2\pi\tau = T$ die Periode bezeichnet, und kürzt ab:

$$\sum_n A^{(2n)} = A_1^I, \quad \sum_n B^{(2n)} = B_1^I, \quad \sum_n \Gamma^{(2n)} = \Gamma_1^I,$$

$$\sum_n \frac{a_{hk}^{(2n)} (-1)^n}{i^{2n}} = \omega_{hk},$$

ebenso:

$$\sum_n A_x^{(2n)} = A_x^I, \quad \sum_n A_y^{(2n)} = A_y^I, \quad \sum_n A_z^{(2n)} = A_z^I, \dots$$

$$\sum_n \frac{a_{hk}^{(2n)} (-1)^n}{i^{2n}} = a_{hk},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

so erhält man für alle Kräfte der ersten Art die Ansätze:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^I = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, \\ B_1^I = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, \\ \Gamma_1^I = a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w, \\ a_{hk} = a_{kh}; \\ \\ - A_x^I = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{14} \frac{\partial v}{\partial x} + \dots, \\ - A_y^I = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{24} \frac{\partial v}{\partial y} + \dots, \\ - A_z^I = a_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{34} \frac{\partial v}{\partial z} + \dots, \\ - B_x^I = a_{41} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{42} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{43} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{44} \frac{\partial v}{\partial x} + \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{hk} = a_{kh}; \end{array} \right.$$

ebenso weiter.

Für die Kräfte der zweiten Art erhält man durch die analoge Einführung von

$$\sum_n A^{(2n+1)} = A_1^{II}, \quad \sum_n B^{(2n+1)} = B_1^{II}, \quad \sum_n \Gamma^{(2n+1)} = \Gamma_1^{II},$$

$$\sum_n \frac{\beta_{hk}^{(2n+1)} (-1)^n}{i^{2n}} = \beta_{hk};$$

$$\sum_n A_x^{(2n+1)} = A_x^{II}, \quad \sum_n A_y^{(2n+1)} = A_y^{II}, \quad \sum_n A_z^{(2n+1)} = A_z^{II}, \dots$$

$$\sum_n \frac{b_{hk}^{(2n+1)} (-1)^n}{i^{2n}} = b_{hk},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

das System:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^{II} = \beta_{12}v' + \beta_{13}w', \\ B_1^{II} = \beta_{21}u' + \beta_{23}w', \\ \Gamma_1^{II} = \beta_{31}u' + \beta_{32}v', \\ \beta_{hk} = -\beta_{kh}; \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A_x^{II} = b_{12} \frac{\partial u'}{\partial y} + b_{13} \frac{\partial u'}{\partial z} + b_{14} \frac{\partial v'}{\partial x} + \dots, \\ -A_y^{II} = b_{21} \frac{\partial u'}{\partial x} + b_{23} \frac{\partial u'}{\partial z} + b_{24} \frac{\partial v'}{\partial x} + \dots, \\ -A_z^{II} = b_{31} \frac{\partial u'}{\partial x} + b_{32} \frac{\partial u'}{\partial y} + b_{34} \frac{\partial v'}{\partial x} + \dots, \\ -B_x^{II} = b_{41} \frac{\partial u'}{\partial x} + b_{42} \frac{\partial u'}{\partial y} + b_{43} \frac{\partial u'}{\partial z} + \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{hk} = -b_{kh}; \end{array} \right.$$

ebenso die höheren Glieder.

Die letzteren können aber ausser Betracht bleiben, wenn man als Resultat der Beobachtung heranzieht, dass in keinem bekannten Körper sich mehr als zwei Wellen in derselben Richtung fortpflanzen; denn die Ausdrücke von der Form $A_{xy}, \dots, A_{yz}, \dots$ liefern in die Bewegungsgleichungen eingesetzter Glieder, welche vierten, sechsten, ... Differentialquotienten nach den Coordinaten proportional sind und daher für das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit Gleichungen vierten, sechsten, ... Grades ergeben würden.

Beschränkt man sich also auf die vier Gruppen (9) bis (12), so erhält man dieselben Ausdrücke, welche ich in meiner ersten Publication aufgestellt habe, nur sind die Coefficienten α, β, a, b jetzt Reihen, geordnet nach fallenden Potenzen der Quadrate der Schwingungsdauer; dem entspricht jetzt auch ein viel allgemeineres Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, deren Quadrat durch den Quotienten zweier solcher Reihen gegeben wird.

Zu den oben mit A_1, B_1, Γ_1 bezeichneten Kräften lässt sich noch diejenige Gattung fügen, welche, wie es scheint, geeignet ist, die Gesetze des Lichtes in bewegten Körpern zu ergeben, und welche das Prinzip der Erhaltung der Energie dadurch erfüllt, dass sie die Arbeit:

$$S' = \int dk (A u' + B v' + \Gamma w')$$

ganz in ein Oberflächenintegral zu verwandeln gestattet, das seinerseits ein Differentialquotient nach der Zeit, z. B. Null ist.

Setzt man dazu:

$$(13) \quad A u' + B v' + \Gamma w' = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + \frac{\partial \Xi}{\partial z}, \quad \text{so wird:}$$

$$S' = \int d\sigma (\bar{\Lambda} \cos(nx) + \bar{M} \cos(ny) + \bar{N} \cos(nz)).$$

Nimmt man die drei Glieder gesondert vor, setzt also zunächst M und N gleich Null, so gelangt man zu dem Ansatz:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_a = \sum A_a^{(h)}, \dots, \\ A_a^{(h)} = \delta_{11}^{(h)} \frac{\partial^h u'}{\partial x^h} + \delta_{12}^{(h)} \frac{\partial^h v'}{\partial x^h} + \delta_{13}^{(h)} \frac{\partial^h w'}{\partial x^h}, \\ B_a^{(h)} = \delta_{21}^{(h)} \frac{\partial^h u'}{\partial x^h} + \delta_{22}^{(h)} \frac{\partial^h v'}{\partial x^h} + \delta_{23}^{(h)} \frac{\partial^h w'}{\partial x^h}, \\ \Gamma_a^{(h)} = \delta_{31}^{(h)} \frac{\partial^h u'}{\partial x^h} + \delta_{32}^{(h)} \frac{\partial^h v'}{\partial x^h} + \delta_{33}^{(h)} \frac{\partial^h w'}{\partial x^h}. \end{array} \right.$$

Damit $A_a^{(h)} u' + B_a^{(h)} v' + \Gamma_a^{(h)} w'$ ein Differentialquotient nach x sei, muss nach den auf p. 414 angestellten Entwickelungen:

$$\begin{array}{ll} \text{für } h = 2n-1 & \delta_{hk}^{(2n)} = \delta_{kh}^{(2n)}, \\ \text{für } h = 2n & \delta_{kh}^{(2n+1)} = 0, \quad \delta_{hk}^{(2n+1)} = -\delta_{kh}^{(2n+1)} \end{array}$$

sein.

Die Anzahl der möglichen Werthe n beschränkt sich, wenn man als durch die Beobachtung wahrscheinlich gemacht betrachtet, dass auch unter der Wirkung dieser Kräfte nie mehr als zwei verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in derselben Richtung eintreten. Denn dann darf h nicht grösser als 2 werden. $h=0$ und $h=2$ gibt aber, wie man leicht übersieht, ein System von Werthen, welches schon in (11) und (12) enthalten ist. Es bleibt sonach als allgemeinstes:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_a = \delta_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + \delta_{12} \frac{\partial v'}{\partial x} + \delta_{13} \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ B_a = \delta_{21} \frac{\partial u'}{\partial x} + \delta_{22} \frac{\partial v'}{\partial x} + \delta_{23} \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ \Gamma_a = \delta_{31} \frac{\partial u'}{\partial x} + \delta_{32} \frac{\partial v'}{\partial x} + \delta_{33} \frac{\partial w'}{\partial x}, \\ \text{wo:} \quad \delta_{hk} = \delta_{kh} \end{array} \right.$$

ist. Daraus folgt dann:

$$2\Lambda = \delta_{11} u'^2 + \delta_{22} v'^2 + \delta_{33} w'^2 + 2\delta_{23} v' w' + 2\delta_{31} w' u' + 2\delta_{12} u' v'.$$

Bei Berücksichtigung der Glieder mit M und N ergibt sich ebenso:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_b = \varepsilon_{11} \frac{\partial u'}{\partial y} + \varepsilon_{12} \frac{\partial v'}{\partial y} + \varepsilon_{13} \frac{\partial w'}{\partial y}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_c = \vartheta_{11} \frac{\partial u'}{\partial z} + \vartheta_{12} \frac{\partial v'}{\partial z} + \vartheta_{13} \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Wie für diese Gattung von Kräften durch die angestellte Betrachtung keine erweiterte Gestalt gewonnen ist, so gilt ersichtlich gleiches auch von denen, welche ich als absorbirende eingeführt habe, weil sie die Eigenschaft besitzen, unter allen Umständen die Energie einer fortgepflanzten Bewegung zu vermindern. Für sie bleiben die früheren Ansätze:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^{III} = \gamma_{11} u' + \gamma_{12} v' + \gamma_{13} w', \\ B_1^{III} = \gamma_{21} u' + \gamma_{22} v' + \gamma_{23} w', \\ \Gamma_1^{III} = \gamma_{31} u' + \gamma_{32} v' + \gamma_{33} w', \\ \gamma_{hk} = \gamma_{kh}, \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A_x^{III} = c_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{14} \frac{\partial v'}{\partial x} + \dots, \\ -A_y^{III} = c_{21} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{24} \frac{\partial v'}{\partial x} + \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ c_{hk} = c_{kh}. \end{array} \right.$$

Die Coëfficienten γ_{hk} und c_{hk} unterliegen nur denjenigen Ungleichungen, welche erfüllt sein müssen, damit die Arbeit der vorstehenden Kräfte eine negative Summe von Quadraten ist. Die Beziehungen $\gamma_{hk} = \gamma_{kh}$ und $c_{hk} = c_{kh}$ enthalten keine Beschränkungen, da, wenn sie nicht erfüllt wären, sich aus den Systemen (16) und (17) zwei von der Form (11) und (12) absondern lassen würden, welche Energie erhaltende Kräfte darstellen.

Wenn bei den übrigen Kräften das Vorkommen höherer Differentialquotienten nach der Zeit als des zweiten sich mit der Erhaltung der Energie vereinbar erwiesen hat, so mag das Beibehalten solcher Glieder zunächst Befremden erregen. Es ist aber zu bedenken, dass die Kräfte, welche in den Differentialgleichungen auftreten, keineswegs die Elementarwirkungen sind, welche von der ponderablen Materie auf den Aether ausgeübt werden, sondern die Resultate der gewiss sehr complicirten Vorgänge darstellen, welche sich im Innern der einzelnen Moleküle abspielen.

II. Die Annahme der Incompressibilität des Lichtäthers ist zuerst von Hrn. C. Neumann¹⁾ bei seiner Entwickelung einer Theorie der Drehung der Polarisationsebene gemacht worden; bei der Theorie der Doppelbrechung ist sie dann von Hrn. F. Neumann²⁾, bei der Theorie der Reflexion und Brechung von Hrn. Von der Mühl³⁾ u. A. angewandt.

In allen diesen Untersuchungen erscheint die Formel:

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

als eine neben den Bewegungsgleichungen den drei Unbekannten u, v, w aufzuerlegende Bedingung, die nach der Methode des Multiplicators von Lagrange behandelt wird. Dass dieser Multiplicator dabei die Rolle eines zu den elastischen Kräften hinzutretenden hydrostatischen Druckes spielt, ist von Hrn. F. Neumann⁴⁾ ausgesprochen worden.

Ich habe mich zuerst ganz an die frühere Auffassung angeschlossen, welche die Bedingung $\delta = 0$ als eine Eigenschaft des Lichtäthers hervortreten lässt; später habe ich den hydrostatischen Druck mit den anderen Kräften zu einem gemeinsamen Potential zusammengefasst⁵⁾, wie das der Auffassung entspricht, dass die Bedingung $\delta = 0$ eine Eigenschaft der wirkenden Kräfte bezeichne. Aber ich habe mich darauf beschränkt, diese Bedingung nur bei Lichtbewegung in ebenen Wellen einzuführen und mit den speciellen hier resultirenden Werthen des hydrostatischen Druckes zu rechnen.

Hr. P. Volkmann⁶⁾ hat zuerst in dem speciellen Falle, dass nur die Kräfte der gewöhnlichen Elasticitätstheorie wirken, die Bedingung $\delta = 0$ zur näheren Bestimmung der Constanten des Potentials allgemein angewandt, und seine Methode unter Vermeidung eines von ihm gemachten kleinen Versehens erweist sich auch in unserem viel allgemeineren Problem äusserst nützlich.

1) C. Neumann, Die magn. Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, Halle 1863. p. 34.

2) F. Neumann, Vorles. über Elasticität. Leipzig 1885. p. 241.

3) Von der Mühl, Dissertation. Königsberg 1866.

4) F. Neumann, l. c. p. 245.

5) W. Voigt, Wied. Ann. 24. p. 160. 1885.

6) P. Volkmann, Wied. Ann. 35. p. 354. 1888.

Wir wollen demgemäß jetzt die Specialisirungen vornehmen, welche sich für die oben aufgestellten Ausdrücke der Kräfte ergeben, wenn man ihnen die Bedingung auferlegt, unter keinen Umständen eine Compression des Aethers hervorzurufen.

Da die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\epsilon u'' = A - \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right),$$

$$\epsilon v'' = B - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right),$$

$$\epsilon w'' = \Gamma - \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right),$$

und die ersten und zweiten Glieder rechts voneinander ganz unabhängig sind, so ergibt $\delta = 0$ oder $\delta'' = 0$ zunächst:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen zerfallen, da sie allgemein gelten sollen, wiederum je in so viele, als in ihnen voneinander unabhängige Differentialquotienten der Variablen u, v, w vorkommen.

Benutzt man die Ausdrücke (5) für die $A^{(2n)}$, $B^{(2n)}$, $\Gamma^{(2n)}$, so erkennt man, dass für dieselben:

$$\alpha_{11}^{(2n)} = \alpha_{22}^{(2n)} = \alpha_{33}^{(2n)}; \quad \alpha_{12}^{(2n)} = \alpha_{23}^{(2n)} = \alpha_{31}^{(2n)} = 0,$$

und also auch:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha, \quad \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0$$

sein muss. Sonach reducirt sich das System (9) auf:

$$(18) \quad A_1^I = \alpha u, \quad B_1^I = \alpha v, \quad \Gamma_1^I = \alpha w,$$

und man erkennt leicht, dass sich diese Glieder in dem Falle periodischer Bewegungen in den Bewegungsgleichungen einfach mit der Dichtigkeit des Aethers combiniren in der Form $(\epsilon + \alpha r^2)$, — ein Umstand, der ihr Vorkommen nicht eben wahrscheinlich macht. Denn sie geben unter keinen Umständen eine Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Richtung. Die Betrachtung der Grenzbe-

dingungen wird noch weitere Gründe dafür liefern, dass ich ehedem bei den Anwendungen der Theorie meist die Coefficienten α gleich Null gesetzt habe.

Dasselbe Verfahren, angewandt auf die Kräfte (7), gibt aber:

$$\beta_{hk}^{(2n+1)} = 0,$$

und damit auch die Kräfte:

$$(19) \quad A_1^{II} = B_1^{II} = \Gamma_1^{II} = 0.$$

Legen wir also den Kräften A^I, B^I, Γ^I und $A^{II}, B^{II}, \Gamma^{II}$, welche nur Differentialquotienten nach der Zeit enthalten, die Bedingung $\delta = 0$ auf, so reduciren sie sich auf:

$$\begin{aligned} A_1^I &= \alpha u, & B_1^I &= \alpha v, & \Gamma_1^I &= \alpha w, \\ A_1^{II} &= B_1^{II} = \Gamma_1^{II} = 0. \end{aligned}$$

Complicirter ist die Betrachtung der übrigen Kräfte (6) und (8). Hier erhält man als zu erfüllende Bedingung je eine Gleichung, die lineär ist in den dritten Differentialquotienten der u, v, w nach den Coordinaten. Aber diese sind nicht sämmtlich von einander unabhängig, sondern aus $\delta = 0$ folgen durch zweimalige Differentiation die sechs Bedingungen¹⁾:

$$\frac{\partial^3 \delta}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \delta}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 \delta}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 \delta}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 \delta}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^3 \delta}{\partial x \partial y} = 0.$$

Mit ihrer Hülfe hat man also sechs der dreissig dritten Differentialquotienten der u, v, w durch die übrigen auszudrücken und hiernach die Coefficienten jener einzeln gleich Null zu setzen. Für die zu eliminirenden wählt man am symmetrischsten die folgenden:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Die Resultate der Rechnung sind folgende Beziehungen, in denen die α_h und α'_h zur Vereinfachung der Darstellung eingeführte neue Constanten sind.

1) Diese übersehen zu haben ist der oben erwähnte Fehler der Volkmann'schen Betrachtung; ein später gemachter Versuch der Berichtigung ist meines Erachtens nicht geglückt (s. Schriften der phys.-ökon. Ges. in Königsberg 21. p. 7. 1890).

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} a_{14} = a_{17} = a_{53} = a_{58} = a_{83} = a_{96} = 0, \\ a_{11} = a_1', \quad a_{55} = a_2', \quad a_{99} = a_3', \\ a_{32} = a_3 + a_1', \quad a_{33} = a_2 + a_1', \quad a_{44} = a_3 + a_2', \quad a_{66} = a_1 + a_3', \\ \quad a_{77} = a_2 + a_3', \quad a_{88} = a_1 + a_3', \\ \quad -(a_{59} + a_{68}) = a_3' + a_2' + a_1, \quad -(a_{19} + a_{37}) = a_3' + a_1' + a_2, \\ \quad -(a_{51} + a_{42}) = a_1' + a_2' + a_3, \\ \quad -a_{47} = a_{16} + a_{34} = a_{18} + a_{27} = a_4 - a_4', \\ \quad -a_{26} = a_{63} + a_{62} = a_{67} + a_{48} = a_5 - a_5', \\ \quad -a_{36} = a_{92} + a_{83} = a_{49} + a_{76} = a_6 - a_6', \\ \quad a_{23} = -a_4, \quad a_{64} = -a_5, \quad a_{78} = -a_6 \\ a_{60} = a_{99} = -a_4', \quad a_{13} = a_{97} = -a_5', \quad a_{12} = a_{54} = -a_6'. \end{array} \right.$$

Hierbei sind die oberen Indices $(2n)$ fortgelassen, also die Beziehungen sogleich für die $a_{hk} = \Sigma (-1)^n a_{hk}^{(2n)} / \tau^{2n}$ aufgestellt.

Bei Einführung dieser Relationen lassen sich die Kräfte A_2^I, B_2^I, Γ_2^I folgendermaassen schreiben:

$$(20) \quad A_2^I = \frac{\partial \Psi^I}{\partial z} - \frac{\partial X^I}{\partial y}, \quad B_2^I = \frac{\partial X^I}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^I}{\partial z}, \quad \Gamma_2^I = \frac{\partial \Phi^I}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^I}{\partial x}.$$

worin:

$$(20') \left\{ \begin{array}{l} \Phi^I = X^I + \frac{\partial N^I}{\partial y} - \frac{\partial M^I}{\partial z}, \quad \Psi^I = Y^I + \frac{\partial \Lambda^I}{\partial z} - \frac{\partial N^I}{\partial x}, \\ X^I = Z^I + \frac{\partial M^I}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda^I}{\partial y} \end{array} \right.$$

und:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} X^I = \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad Y^I = \frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad Z^I = \frac{\partial P}{\partial \zeta}, \\ 2P = a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2 + 2(a_4 \eta \zeta + a_5 \xi \zeta + a_6 \xi \eta) \end{array} \right.$$

aber:

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^I = \frac{\partial \Pi}{\partial u}, \quad M^I = \frac{\partial \Pi}{\partial v}, \quad N^I = \frac{\partial \Pi}{\partial w}, \\ 2\Pi = a_1' u^2 + a_2' v^2 + a_3' w^2 + 2(a_4' v w + a_5' w u + a_6' u v) \end{array} \right. \text{ ist.}$$

Hierin bezeichnen:

$$(24') \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

die doppelten Rotationscomponenten um die Coordinatenachsen, zwischen denen die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Sondert man die Werthe A_2^I, B_2^I, Γ_2^I in die beiden Theile, von denen der eine die Constanten mit, der andere die Constanten ohne Index enthält, so stellen die ersteren

die Fresnel'schen, die zweiten die Neumann'schen auf den Aether wirkenden Kräfte dar, je auf ein gegen das bezügliche Symmetrieaxensystem geneigtes Axenkreuz bezogen.

Die allgemeinsten mit dem Princip der Energie und mit der Gleichung $\delta = 0$ vereinbaren Kräfte A_2^I, B_2^I, Γ_2^I stimmen also weder mit den Neumann'schen noch mit den Fresnel'schen Ausdrücken überein, sind auch nicht einmal symmetrisch gegen drei aufeinander senkrechte Axen, aber sie stellen sich für jede Farbe dar als die Superposition zweier Kraftsysteme, die in Bezug auf zwei im allgemeinen verschiedene Axenkreuze symmetrisch verteilt sind und von denen das eine mit den Neumann'schen, das andere mit den Fresnel'schen Werthen identisch ist.

Dies Resultat ist von einer überraschenden Einfachheit und führt, wenn man die auf die Beobachtung gegründete Annahme einführt, dass für eine jede Farbe die optischen Erscheinungen in durchsichtigen nicht activen Krystallen in Bezug auf drei zu einander normale Axen symmetrisch sind, mit Nothwendigkeit entweder zu dem Neumann'schen oder zu dem Fresnel'schen System der Gesetze der Doppelbrechung.

Irgend ein Grund dafür, das eine oder das andere System zu bevorzugen, ist auf diesem Stadium der Entwicklung noch nicht vorhanden.

Die Anwendung desselben Verfahrens auf die Kräfte des Systems (8) liefert die Bedingungen für die Constanten $b_{hk}^{(2n+1)}$ und demgemäß auch die $b_{hk} = \Sigma (-1)^n b_{hk}^{(2n+1)} / \tau^{2n}$, in denen b_1, b_2, b_3 neue Constanten bezeichnen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{14} = b_{25} = b_{53} = b_{39} = b_{69} = b_{17} = 0 \\ -b_{47} = -(b_{16} + b_{34}) = +(b_{18} + b_{27}) = b_1, \\ b_{28} = -(b_{35} + b_{26}) = -(b_{48} + b_{57}) = b_2, \\ -b_{36} = -(b_{67} + b_{49}) = +(b_{38} + b_{29}) = b_3. \end{array} \right.$$

Die Voraussetzung, dass sie unter keinen Umständen eine Compression oder Dilatation des Aethers verursachen, bringt die Kräfte $A_2^{II}, B_2^{II}, \Gamma_2^{II}$ auf die Form:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2^{II} = b_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + b_3 \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ B_2^{II} = b_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + b_3 \frac{\partial \eta}{\partial z}, \\ \Gamma_2^{II} = b_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + b_3 \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Setzt man noch:

$$b_1 = b\alpha, \quad b_2 = b\beta, \quad b_3 = b\gamma,$$

wo α, β, γ die Richtungscosinus einer gewissen Richtung a sind, so wird:

$$(24') \quad A_2^{II} = b \frac{\partial \xi'}{\partial a}, \quad B_2^{II} = b \frac{\partial \eta'}{\partial a}, \quad \Gamma_2^{II} = b \frac{\partial \zeta'}{\partial a}.$$

Diese allgemeinsten mit dem Energieprincip und der Gleichung $\delta = 0$ vereinbaren Kräfte der $A_2^{II}, B_2^{II}, \Gamma_2^{II}$ sind hiernach rings um die Axe a gleichmässig vertheilt und geben Wirkungen, welche vollständig mit denen zusammenfallen, die in einem homogenen magnetischen Felde, dessen Kraftlinien der Richtung a parallel laufen, beobachtet werden.

Mit der vorstehenden Entwicklung sind diejenigen Annahmen¹⁾, welche bei der früheren Benutzung der Bedingung $\delta = 0$ noch erforderlich waren, um die allgemeinen Gleichungen auf die speciellen Gesetze der electromagnetischen Einwirkung auf das Licht zu reduciren, überflüssig geworden; jene Gesetze erscheinen als das allgemeinste mit den Voraussetzungen Vereinbare.

Die Gleichungen des Systems (24) lassen sich in zwei verschiedenen Formen schreiben, welche den beiden Theilen (21) und (22) von (20) entsprechen und analog bezeichnet werden mögen. Es ist nämlich einerseits:

$$(25) \quad A_2^{II} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Lambda^{II}}{\partial z} - \frac{\partial N^{II}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M^{II}}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda^{II}}{\partial y} \right), \text{ u. s. f.}$$

wo nun:

$$\Lambda^{II} = b_2 w' - b_3 v', \quad M^{II} = b_3 u' - b_1 w', \quad N^{II} = b_1 v' - b_2 u'$$

ist; andererseits auch:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2^{II} = \frac{\partial Y^{II}}{\partial z} - \frac{\partial Z^{II}}{\partial y}, \quad B_2^{II} = \frac{\partial Z^{II}}{\partial x} - \frac{\partial X^{II}}{\partial z}, \\ \Gamma_2^{II} = \frac{\partial X^{II}}{\partial y} - \frac{\partial Y^{II}}{\partial x}, \end{array} \right.$$

worin:

$$X^{II} = (b_2 \zeta' - b_3 \eta'), \quad Y^{II} = (b_3 \xi' - b_1 \zeta'), \quad Z^{II} = (b_1 \eta' - b_2 \xi')$$

ist.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 493. 1884.

Dabei ist aber zu bemerken, dass, während die Theile der A_2^I , B_2^I , Γ_2^I wirklich verschiedene Bedeutung hatten, hier nur verschiedene Formen derselben Kräfte vorliegen. Hier wie dort gehen aber die X , Y , Z in die Λ , M , N über, wenn man ξ , η , ζ mit u , v , w vertauscht.

Wendet man endlich auch auf die Kräfte des Systems (15) die Annahme an, dass sie Dilatationen und Compressionen des Aethers nicht verursachen, so gelangt man zu dem Resultat, dass:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_1 \quad \text{und} \quad \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{12} = 0$$

sein muss und analoges für die δ_{hk} und δ_{hk} stattfindet. Demgemäß wird dies System vereinfacht zu:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Lambda' = \delta_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial u'}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ -B' = \delta_1 \frac{\partial v'}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial v'}{\partial z}, \\ -\Gamma' = \delta_1 \frac{\partial w'}{\partial x} + \delta_2 \frac{\partial w'}{\partial y} + \delta_3 \frac{\partial w'}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Setzt man:

$$\delta_1 = d\alpha_1, \quad \delta_2 = d\beta_1, \quad \delta_3 = d\gamma_1,$$

worin α_1 , β_1 , γ_1 die Richtungscosinus einer Axe a_1 sind, so wird noch einfacher:

$$(27') \quad -\Lambda' = d \frac{\partial u'}{\partial a_1}, \quad -B' = d \frac{\partial v'}{\partial a_1}, \quad -\Gamma' = d \frac{\partial w'}{\partial a_1};$$

die gefundenen Ausdrücke sind also rings um die Axe a_1 symmetrisch.

Da diese Kräfte, wie es scheint, die Gesetze des Lichtes in bewegten Medien ergeben, so wird man in unkristallinen Körpern die Richtung a_1 ohne Weiteres mit der Translationsrichtung identificiren müssen, in kristallinen lässt sich die Richtung a_1 nicht allgemein bestimmen; die bezüglichen Erscheinungen werden also in kristallinen Körpern von drei, in isotropen von einer Constanten abhängen. In jedem Falle bestimmt diese Kräfte nur eine Vectorgrösse und dieser Umstand macht sie anscheinend zu dem erwähnten Zwecke besonders geeignet.

Die absorbirenden Kräfte (16) und (17) haben genau dieselbe Form, wie die nicht absorbirenden (9) und (10), nur

steht u' , v' , w' an Stelle von u , v , w . Die Einführung der Bedingung $\delta = 0$ ergibt demnach zwischen ihren Constanten dieselbe Reihe von Bedingungen (20), welche oben gefunden ist, und alle an jene geknüpften Folgerungen bleiben für sie in Gültigkeit.

Wir können also z. B. sogleich die beiden Systeme absorbirender Kräfte hinschreiben:

$$(28) \quad A_1^{III} = \gamma u', \quad B_1^{III} = \gamma v', \quad \Gamma_1^{III} = \gamma w',$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2^{III} = \frac{\partial \Psi^{III}}{\partial z} - \frac{\partial X^{III}}{\partial y}, \quad B_2^{III} = \frac{\partial X^{III}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{III}}{\partial z}, \\ \Gamma_2^{III} = \frac{\partial \Phi^{III}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^{III}}{\partial x}, \end{array} \right.$$

wo wiederum:

$$(29') \quad \Phi^{III} = X^{III} + \frac{\partial N^{III}}{\partial y} - \frac{\partial M^{III}}{\partial z}, \dots \quad \text{und:} \\ X^{III} = \frac{\partial R}{\partial \xi}, \dots, \quad \Lambda^{III} = \frac{\partial P}{\partial u}, \dots$$

ist; dabei bedeutet:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2R = c_1 \xi'^2 + c_2 \eta'^2 + c_3 \zeta'^2 + 2(c_4 \eta' \zeta' + c_5 \zeta' \xi' + c_6 \xi' \eta'), \\ 2P = c_1' u'^2 + c_2' v'^2 + c_3' w'^2 + 2(c_4' v' w' + c_5' w' u' + c_6' u' v'). \end{array} \right.$$

Demgemäß gilt auch sogleich der Satz:

Die allgemeinsten jederzeit absorbirenden Kräfte, welche mit der Bedingung $\delta = 0$ vereinbar sind, stellen sich dar als die Superposition von zwei Kraftsystemen, die in Bezug auf zwei im allgemeinen verschiedene Axenkreuze symmetrisch liegen, und von denen das eine die Ausdehnung der Neumann'schen, das andere die der Fresnel'schen Gesetze des Lichtes von durchsichtigen auf absorbirende Krystalle liefert.

Nimmt man als Resultat der Beobachtung an, dass die absorbirenden Kräfte eine Symmetrie in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem zeigen, so hat man das eine der beiden Systeme Constanten gleich Null zu setzen und entweder nur die der Neumann'schen oder die der Fresnel'schen Auffassung entsprechenden Kräfte beizubehalten.

Bei periodischen, also Lichtbewegungen kann man für nicht active Krystalle die Energie erhaltenden und verzehrenden Kräfte in das einzige System (20) zusammenfassen, indem man nur den Constanten complexe Werthe beilegt.

III. Benutzen wir das Resultat der oben angestellten Schlussreihe, nach welchen Kräfte A_h, B_h, Γ_h für $h \geq 3$ nicht vorzukommen scheinen, so bleiben also für die Aufstellung der Grenzbedingungen nur zwei Gattungen $A_1, A_2 \dots$ zu berücksichtigen. Das Oberflächenintegral J_0 in Formel (2) enthält deren sogar nur die zweite Art, und lautet:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_0 = \int do [(\bar{A}_x \cos(n, x) + \bar{A}_y \cos(n, y) + \bar{A}_z \cos(n, z)) \bar{u}' \\ \quad + (\bar{B}_x \cos(n, x) + \bar{B}_y \cos(n, y) + \bar{B}_z \cos(n, z)) \bar{v}' \\ \quad + (\bar{\Gamma}_x \cos(n, x) + \bar{\Gamma}_y \cos(n, y) + \bar{\Gamma}_z \cos(n, z)) \bar{w}'] \end{array} \right.$$

das Integral genommen über alle Oberflächen, welche heterogene Theile des Systems trennen.

Nach dem p. 413 Gesagten muss J_0 jedenfalls an der Grenze zweier durchsichtiger Medien ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein; gleiches gilt aber auch an der Grenze absorbirender Medien, da eine in der Grenzschicht in endlicher Zeit absorbirte endliche Energie in einer unendlich kleinen Masse enthalten sein müsste und diese bei einer Umsetzung in Wärme also auf eine unendliche Temperatur bringen würde.

Betrachten wir die einzelnen Theile der Grenzfläche als unabhängig von einander, was durch die Beobachtung ge-rechtfertigt wird, so ist die gestellte Forderung, wie bezüglich des ganzen Integralwerthes, so auch bezüglich der zu integrirenden Function zu erheben. Da jedes Element do als Grenze zweier Medien zweimal mit entgegengesetzter Richtung der Normalen in dem auf alle Oberflächenelemente bezogenen Integral J_0 auftritt, so ist die fragliche Function, falls wir der Bequemlichkeit halber die Z -Axe in die eine Normale legen:

$$[\bar{A}_z \bar{u}' + \bar{B}_z \bar{v}' + \bar{\Gamma}_z \bar{w}']_1 - [\bar{A}_z \bar{u}' + \bar{B}_z \bar{v}' + \bar{\Gamma}_z \bar{w}']_2.$$

Nun sind die A_z, B_z, Γ_z , wie oben in (10) und (12) gefunden, ersten Differentialquotienten nach den Coordinaten proportional, es ist also im allgemeinen, d. h. für beliebige Gesetze der Verrückungen, unmöglich, dass dieser Ausdruck ein Differentialquotient nach der Zeit ist; er muss also um dem Princip zu genügen *einen verschwindenden Werth haben*, d. h. es muss gelten:

$$(32) \quad [\bar{A}_z \bar{u}' + \bar{B}_z \bar{v}' + \bar{C}_z \bar{w}']_1 = [\bar{A}_z \bar{u}' + \bar{B}_z \bar{v}' + \bar{C}_z \bar{w}']_2.$$

In Bezug auf die Gleichung (32) ist zu bemerken, dass sie durch die bisherige Ableitung nicht ganz eindeutig bestimmt ist; denn es ist im allgemeinen noch auf eine zweite Weise möglich, die Arbeit S in ein Raum- und ein Oberflächenintegral $J_k + J_o$ derartig zu zerlegen, dass ersteres bei durchsichtigen Medien ein Differentialquotient nach der Zeit, bei absorbirenden eine Summe von Quadraten ist.

Da nämlich die $A_z \dots$ nach (10) und (12) ersten Differentialquotienten nach den Coordinaten proportional sind, so kann man die Gesamtcomponenten $A_z \dots$, statt wie in (1):

$$(33) \quad -A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ u. s. f.}$$

zu setzen, auch nach den in $A_z \dots$ vorkommenden Differentialquotienten ordnen und schreiben:

$$(33') \quad -A_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} \text{ u. s. f.},$$

wo nunmehr z. B.:

$$(34) \quad \left| \begin{array}{l} -\mathfrak{A}_x^I = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{31} \frac{\partial u}{\partial z} + a_{14} \frac{\partial v}{\partial x} + a_{24} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \quad + a_{34} \frac{\partial v}{\partial z} + a_{17} \frac{\partial w}{\partial x} + a_{27} \frac{\partial w}{\partial y} + a_{37} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \dots \quad \quad \quad a_{hk} = +a_{kh}, \\ -\mathfrak{A}_x^{II} = \quad b_{21} \frac{\partial u'}{\partial y} + b_{31} \frac{\partial u'}{\partial z} + b_{14} \frac{\partial v'}{\partial x} + b_{24} \frac{\partial v'}{\partial y} \\ \quad + b_{34} \frac{\partial v'}{\partial z} + b_{17} \frac{\partial w'}{\partial x} + b_{27} \frac{\partial w'}{\partial y} + b_{37} \frac{\partial w'}{\partial z} \\ \dots \quad \quad \quad b_{hk} = -b_{kh} \end{array} \right.$$

ist, und jetzt die theilweise Integration wie früher ausführen.

In der That ist dann die im Raumintegral J_k auftretende Function:

$$(35) \quad \mathfrak{A}_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial u'}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial u'}{\partial z} + \mathfrak{B}_x \frac{\partial v'}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial v'}{\partial y} + \dots,$$

wie leicht zu sehen, wiederum ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit (resp. eine Summe von Quadraten), und der Gleichung (32) ordnet sich als gleichberechtigt zu:

$$(36) \quad [\bar{\mathfrak{A}}_z \bar{u}' + \bar{\mathfrak{B}}_z \bar{v}' + \bar{\mathfrak{C}}_z \bar{w}']_1 = [\bar{\mathfrak{A}}_z \bar{u}' + \bar{\mathfrak{B}}_z \bar{v}' + \bar{\mathfrak{C}}_z \bar{w}']_2.$$

Andere Zerlegungen von A , B , Γ als die in (33) und (33') kommen als unsymmetrisch von vorn herein nicht in Betracht.

Die beiden Formeln (32) und (36) sind im allgemeinen keineswegs identisch und es ist daher eine Entscheidung zwischen ihnen nötig. Eine solche wäre sofort zu geben, wenn man den bisher innegehaltenen rein mathematischen Standpunkt verlassen und den $A_z \dots$, resp. $\mathfrak{A}_z \dots$ eine physikalische Bedeutung beilegen wollte, wie sie der Parallelismus der Formeln mit denjenigen der Elasticitätstheorie nahe legt. In dessen wollen wir der grössern Allgemeinheit halber den oben eingenommenen Standpunkt auch fernerhin beibehalten.

Unter dessen Wahrung trifft sich aber die Entscheidung, wenn wir die Annahme, welche in der Optik zumeist stillschweigend gemacht wird, ausdrücklich einführen, *dass wie für die Fortpflanzung innerhalb eines Mediums, so auch für den Uebergang aus einem ins andere mehrere selbstständige Wellen sich einfach superponiren*. Dies verlangt, dass, wie die Hauptgleichungen, so auch die Grenzbedingungen in den Verückungen u , v , w lineär sind.

Wir wenden uns zunächst zu den Formeln, die dem Neumann'schen System entsprechen. Hier lauten die Bedingungen der Continuität:

$$(37) \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2, \quad \bar{w}_1 = \bar{w}_2$$

und die Gleichungen (32) und (36) nehmen die Gestalt an:

$$(38) \quad [(\bar{A}_z)_1 - (\bar{A}_z)_2] \bar{u}' + [(\bar{B}_z)_1 - (\bar{B}_z)_2] \bar{v}' + [(\bar{\Gamma}_z)_1 - (\bar{\Gamma}_z)_2] \bar{w}' = 0,$$

$$(38') \quad [(\bar{\mathfrak{A}}_z)_1 - (\bar{\mathfrak{A}}_z)_2] \bar{u}' + [(\bar{\mathfrak{B}}_z)_1 - (\bar{\mathfrak{B}}_z)_2] \bar{v}' + [(\bar{\mathfrak{\Gamma}}_z)_1 - (\bar{\mathfrak{\Gamma}}_z)_2] \bar{w}' = 0.$$

Wegen der bekannten Form der $A_z \dots$ und $\mathfrak{A}_z \dots$ können diese Gleichungen eine lineare Form nur dadurch gewinnen, dass mit den Bedingungen der Continuität das Verschwinden aller drei Klammern vereinbar ist.

Dass dies in der ersten Form nicht angeht, ist bekannt; denn, wenn man sich auch nur auf den einfachsten Fall isotroper, durchsichtiger Medien beschränkt, wo die Hauptgleichungen mit den elastischen Grundformeln identisch sind, kommt man auf jenen gewissermaassen berühmten Widerspruch, welcher die Basirung der Reflexionstheorie auf die Elasticitätslehre einfacher Körper unmöglich macht.

Die zweite Form hingegen gestattet dies. Wie nämlich die Vergleichung mit den dem Neumann'schen System entsprechenden Formeln (21), (26), (30) für beliebige krystallinische, active, absorbirende Medien ergibt, ist bei allen diesen:

(39) $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{B}_y = \mathfrak{C}_z = 0$ und $-\mathfrak{B}_z = \mathfrak{C}_y$, $-\mathfrak{C}_x = \mathfrak{A}_z$, $-\mathfrak{A}_y = \mathfrak{B}_z$, es reducirt sich also Formel (38') auf:

$$(39') \quad [(\mathfrak{A}_z)_1 - (\mathfrak{A}_z)_2] \bar{u}' + [(\mathfrak{B}_z)_1 - (\mathfrak{B}_z)_2] \bar{v}' = 0, \quad \text{oder:}$$

$$[(\mathfrak{C}_x)_1 - (\mathfrak{C}_x)_2] \bar{u}' + [(\mathfrak{C}_y)_1 - (\mathfrak{C}_y)_2] \bar{v}' = 0.$$

Zugleich lautet die letzte Hauptgleichung bei alleiniger Rücksicht auf die Kräfte A_2 , B_2 , Γ_2 :

$$(40) \quad \varepsilon w'' = \frac{\partial \mathfrak{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{C}_y}{\partial y},$$

und aus ihr folgt, da in der Grenze $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ ist:

$$(40') \quad \frac{\partial [(\mathfrak{C}_x)_1 - (\mathfrak{C}_x)_2]}{\partial x} + \frac{\partial [(\mathfrak{C}_y)_1 - (\mathfrak{C}_y)_2]}{\partial y} = 0.$$

Dies beweist, dass das Nullsetzen beider Klammerausdrücke mit den Continuitätsbedingungen vereinbar ist, und dass die Forderung lineärer Grenzbedingungen, verbunden mit dem Princip der Erhaltung der Energie nothwendig auf das System der Grenzbedingungen führt, welches symmetrisch geschrieben lautet:

$$(41) \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2, \quad (\mathfrak{C}_x)_1 = (\mathfrak{C}_x)_2, \quad (\mathfrak{C}_y)_1 = (\mathfrak{C}_y)_2.$$

Dasselbe gilt, wie wiederholt werden mag, für beliebige krystallinische, absorbirende und active Körper.

Die Werthe, welche für \mathfrak{C}_x und \mathfrak{C}_y in den einzelnen Fällen zu setzen sind, ergeben sich aus den Systemen (21), (26) und (30). In der daselbst angewandten Bezeichnung ist

$$Y = -\mathfrak{C}_x, \quad X = +\mathfrak{C}_y.$$

Die so sehr einfach gewonnenen Grenzbedingungen stimmen für durchsichtige Krystalle mit den Kirchhoff'schen¹⁾, für absorbirende mit den Drude'schen, resp. meinen eigenen, überein und ihre Resultate sind durch die Beobachtung bestätigt; für active Medien sind sie hier zum ersten Mal aufgestellt.

1) Bei durchsichtigen Krystallen sind übrigens die Gleichungen (38) und (38') gleichwerthig, falls man annimmt, dass u , v , w Functionen einer einzigen Function von x , y , z und t sind.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung (40) ist von den Kräften erster Art A_1, B_1, Γ_1 ausdrücklich abgesehen; man erkennt leicht, dass bei ihrer Einführung die Gewinnung einer lineären Form für die Grenzbedingung (36) überhaupt unmöglich geworden wäre. Daher kann man umgekehrt sagen: wie die Kräfte erster Art schon mit der Bedingung $\delta = 0$ kaum vereinbar waren, so treten sie in directen Widerspruch mit der Annahme, dass verschiedene Wellen sich in demselben Medium und beim Durchgang durch die Grenze zwischen zweien einfach superponiren. Demgemäß sind sie bei verschiedenen Anwendungen, die Hr. Drude und ich von den vorstehenden allgemeinen Formeln gemacht haben, meist von vorn herein gleich Null gesetzt worden.

Wir schliessen hieran noch eine allgemeine Bemerkung:

Geht man von der Annahme aus, dass die Kräfte, welche der Aether bei den Lichtschwingungen erleidet, nur von den Drehungen ξ, η, ζ der Volumenelemente gegen den ponderablen Körper abhängen und entweder die Energie unter allen Umständen erhalten oder verzehren, so gelangt man zu einem System Formeln, das formell mit den elastischen Gleichungen für einen einfachen Körper sowohl hinsichtlich der Hauptgleichungen als der Grenzbedingungen identisch ist; aber die Druckcomponenten \mathfrak{A}_x, \dots haben die von den elastischen abweichende Eigenschaft, dass:

$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{B}_y = \mathfrak{C}_z = 0, \quad -\mathfrak{B}_z = \mathfrak{C}_y, \quad -\mathfrak{C}_z = \mathfrak{A}_x, \quad -\mathfrak{A}_y = \mathfrak{B}_z$
ist. Die für sie geltenden Grenzbedingungen reduciren sich also von selbst von drei auf zwei, welche nur die tangentialen Componenten betreffen.

Es ist von Interesse, hier daran zu erinnern, dass Hr. F. Neumann¹⁾ die erste mechanische Ableitung der Gesetze der totalen Reflexion an der Grenze isotroper Medien gewonnen hat, indem er von den drei durch die Elasticitäts-theorie gelieferten Grenzbedingungen für die Drucke diejenige für die tangentialen Componenten allein beibehielt.

Der im Vorstehenden eingeschlagene Weg zur Gewinnung linearer Grenzbedingungen ist nicht anwendbar, wenn man das der Fresnel'schen Anschauung entsprechende

1) F. Neumann, Pogg. Ann. **40**. p. 509. 1837.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **XLIII**.

System benutzt. Zwar ist es, wie oben in (20), (25) und (30) gezeigt, möglich, den Kräften A, B, Γ eine Form zu geben, welche (33') und zugleich (39) entspricht, aber sie hat nicht die nöthige Eigenschaft, den Ausdruck (35) zu einem Differentialquotienten nach der Zeit zu machen. Dies übersieht man ohne alle Rechnung, da der Ausdruck (35) sich hier auf:

$$\mathfrak{B}_z \xi' + \mathfrak{C}_x \eta' + \mathfrak{A}_y \zeta'$$

reducirt, und dies ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit nur dann sein kann, wenn \mathfrak{B}_z , \mathfrak{C}_x und \mathfrak{A}_y allein von ξ , η , ζ abhängen; dies findet aber bei den obigen Werthen nicht statt.

IV. Die allgemeinsten mit dem Princip der Energie und der Bedingung $\delta = 0$ vereinbaren Werthe der Kräfte A, B, Γ nehmen nach den Entwickelungen des zweiten Abschnittes, falls man sich auf den Fresnel'schen Standpunkt stellt, die Form an:

$$(42) \quad \begin{cases} A_F = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right), \\ B_F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right), \\ \Gamma_F = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right). \end{cases}$$

hingegen bei Einnahme des Neumann'schen Standpunktes die Form:

$$(43) \quad A_N = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad B_N = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \Gamma_N = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x};$$

hierin sind X, Y, Z dieselben lineären Functionen von ξ , η , ζ , wie Λ , M, N von u , v , w . Diese Werthe sind in die Hauptgleichungen:

$$(44) \quad \varepsilon u'' = A, \quad \varepsilon v'' = B, \quad \varepsilon w'' = \Gamma$$

eingesetzt zu denken.

Man erkennt nun leicht, dass, wenn man mit dem System (42) die Beschleunigungen der Rotationscomponenten bildet, man gelangt zu:

$$\begin{aligned} \varepsilon \xi''_F &= A \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right), & \varepsilon \eta''_F &= A \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right), \\ \varepsilon \zeta''_F &= A \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\mathcal{A}u = -\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right), \quad \mathcal{A}v = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \quad \mathcal{A}w = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right);$$

die erhaltenen Formeln sind also der Gestalt nach übereinstimmend mit dem System (43), nur steht $-\xi, -\eta, -\zeta$ an Stelle von u, v, w . Verfährt man ebenso mit dem System (43), so erhält man:

$$\varepsilon \xi'' = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right);$$

diese Gleichungen stimmen genau mit dem System (42) überein, nur steht daselbst u, v, w an Stelle von ξ, η, ζ hier.

Es gilt somit der Satz:

Für die Fortpflanzung irgend welcher Bewegungen innerhalb eines homogenen, übrigens aber beliebig krystallinischen, absorbirenden oder activen Mediums spielen in dem Neumann'schen System die Verrückungen genau dieselbe Rolle, wie die Rotationen in dem Fresnel'schen und umgekehrt.

Dass zwischen den bezüglichen Grenzbedingungen ein ähnliches Verhältniss nicht stattfinden kann, ist nach dem oben entwickelten selbstverständlich; in der That ist kaum zu sagen, welche Gleichungen als ein consequent entwickeltes System Fresnel'scher Grenzbedingungen anzusehen wären. —

Geht man von dem der Neumann'schen Anschauung entsprechenden System (43) aus und bildet mit Hülfe von (44):

$$(45) \quad \varepsilon u'' = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \varepsilon v'' = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \varepsilon w'' = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

so wird, falls die betrachteten Substanzen beliebige, aber nicht active Krystalle sind, nach (21) gelten:

$$(46) \quad X = \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial \zeta},$$

wo: $2P = a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2 + 2(a_4 \eta \zeta + a_5 \zeta \xi + a_6 \xi \eta)$.

Sind die Medien absorbirend, so bleiben die Formeln die gleichen, nur sind die a_k dann komplexe Grössen.

Die Grenzbedingungen lauten in jedem Falle:

$$(47) \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2, \quad \bar{X}_1 = \bar{X}_2, \quad \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2.$$

Vertauscht man nun in diesen Gleichungen die Bezeichnungen u', v', w' resp. mit L, M, N und bedenkt, dass nach der Definition der Drehungscomponenten:

$$(48) \quad \xi' = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \eta' = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \zeta' = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

ist, und dass, wenn man die drei Gleichungen (46) nach ξ, η, ζ auflöst, für diese Werthe resultiren:

$$\xi = \frac{\partial Q}{\partial X}, \quad \eta = \frac{\partial Q}{\partial Y}, \quad \zeta = \frac{\partial Q}{\partial Z},$$

wo $2Q = \alpha_1 X^2 + \alpha_2 Y^2 + \alpha_3 Z^2 + 2(\alpha_4 YZ + \alpha_5 ZX + \alpha_6 XY)$ ist, so kann man (45), (47) und (48) auch schreiben:

$$(49) \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \varepsilon \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \varepsilon \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 X + \alpha_6 Y + \alpha_5 Z) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_6 X + \alpha_2 Y + \alpha_4 Z) = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_5 X + \alpha_4 Y + \alpha_3 Z) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \\ \bar{L}_1 = \bar{L}_2, \quad \bar{M}_1 = \bar{M}_2, \quad \bar{X}_1 = \bar{X}_2, \quad \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2. \end{array} \right.$$

Diese Formeln sind identisch mit den von der electrischen Lichttheorie für durchsichtige nicht active Medien gelieferten, und zwar stehen die X, Y, Z , welche den Charakter elastischer Drucke haben, an Stelle der electrischen Kräfte, die Rotationscomponenten ξ, η, ζ an Stelle der electrischen Polarisationen, die Geschwindigkeiten L, M, N an Stelle der magnetischen Kräfte.

Wendet man die Gleichungen auf absorbirende Medien an, so bleibt die Uebereinstimmung nicht mehr bestehen; indessen ist zu bedenken, dass gerade in diesem Gebiete die Formeln der electrischen Theorie sich durchaus noch nicht bewährt haben, vielmehr die beobachteten Absorptionscoefficienten von so ganz anderer Grössenordnung als die aus den electrischen Widerständen berechneten Werthe sind, dass zunächst kein Grund ist, von unsren Formeln abzugehen, die sich bisher bei allen Anwendungen bewährt haben und nebenbei eine ganz besondere Eleganz besitzen.

Für active Medien sind aus der electrischen Theorie mit Hülfe gewisser Hülfsannahmen Formeln entwickelt, die gleichfalls noch nicht besonders durch die Beobachtung bestätigt sind. Die im Vorstehenden abgeleiteten lassen sich,

falls man unter X, Y, Z dieselben Glieder wie soeben versteht, folgendermaassen schreiben:

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (Y + b_3 \xi' - b_1 \zeta') - \frac{\partial}{\partial y} (Z + b_1 \eta' - b_2 \xi'), \\ \varepsilon \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (Z + b_1 \eta' - b_2 \xi') - \frac{\partial}{\partial z} (X + b_2 \zeta' - b_3 \eta'), \\ \varepsilon \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (X + b_2 \zeta' - b_3 \eta') - \frac{\partial}{\partial x} (Y + b_3 \xi' - b_1 \eta'), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \\ \bar{L}_1 = \bar{L}_2, \quad \bar{M}_1 = \bar{M}_2, \quad (\bar{X} + b_2 \bar{\xi}' - b_3 \bar{\eta}')_1 = (\bar{X} + b_2 \bar{\xi}' - b_3 \bar{\eta}')_2, \\ (\bar{Y} + b_3 \bar{\xi}' - b_1 \bar{\zeta}')_1 = (\bar{Y} + b_3 \bar{\xi}' - b_1 \bar{\zeta}')_2. \end{array} \right.$$

Es treten hier also neben den electrischen Kräften X, Y, Z Glieder auf, die als Kraftcomponenten aufgefasst, eine Resultirende geben würden, welche normal zu der Axe a (s. p. 426) und zur Richtung der electrischen Polarisationsgeschwindigkeit τ' steht und mit τ' , mit der Resultant aus b_1, b_2, b_3 , d. h. mit der Stärke des electromagnetischen Feldes, und mit dem Sinus des Winkels zwischen a und τ' proportional ist.

Göttingen, im März 1891.

XI. Vorlesungsversuch zur Demonstration der Wirkung von Complementärfarben und Farbgemischen beim Zusammenbringen von gelösten Farbstoffen; von Nik. von Klobukow.

Im Nachstehenden möchte ich mir erlauben, auf ein einfaches, meines Wissens bislang noch nicht in Vorschlag gebrachtes Verfahren zur Demonstration der Wirkung von Complementärfarben und Farbgemischen beim Zusammenbringen von gelösten Farbstoffen vor einem grösseren Auditorium aufmerksam zu machen, bei welchem gleichzeitig auch die allmähliche Entmischung der vermengten Farbstoffe gezeigt werden kann.

Das Verfahren besteht darin, dass man die zu mischenen Pigmentfarben in passenden Mengenverhältnissen solchen Lösungsmitteln einverleibt, welche, bei erheblichen Unterschieden im specifischen Gewichte, weder ineinander löslich, noch zur gegenseitigen Aufnahme der gelösten Farbstoffe befähigt sind und durch kräftiges Durcheinanderschütteln solcher Lösungen — also gleichsam durch innigste Mischung ihrer physikalischen Moleküle — die Farbenmischung zu Stande kommen lässt. Wie beim Versuch der Farbenmischung durch Spiegelung, wird auch hier die Farbenwahrnehmung durch directe Einwirkung — also nicht, wie beim Farbenkreisel, durch Nachwirkung — des Lichteindruckes hervorgebracht.

Vermöge der angeführten Eigenschaften der durcheinander geschüttelten Lösungen entmischen sich dieselben beim Stehen nach kürzerer oder längerer Zeit, und man erblickt die beiden übereinander geschichteten Lösungen der gemischten Farbstoffe unverändert wieder. Durch passende Aenderung der Verdünnung der Lösungen, bezw. durch Veränderung ihrer gegenseitigen Mengenverhältnisse gelingt es ohne Mühe, jeden gewünschten Farbeneffect hervorzubringen; andererseits kann durch Zusatz geeigneter Stoffe zu der

einen oder anderen Lösung die Dauer der Entmischung der Lösungen nach Belieben verändert werden.

Was nun die praktische Ausführung der Versuche der Farbenmischung nach dieser Methode anlangt, so mag die nicht immer leicht zu treffende Wahl der Pigmentlösungen durch Angabe nachstehender Recepte erleichtert werden.

Zur Demonstration der Wirkung der Mischung rother und grüner Farbstoffe verwendet man am besten einerseits eine Lösung von Aldehydgrün in Amylalkohol und andererseits eine solche von Cobaltsalzen in Wasser. Unter den verschiedenen Präparaten des Aldehydgrüns wähle man die reinsten, in Amylalkohol mit einer sattgrünen (der Farbe von Nickelsalzlösungen ähnlichen) Farbe leicht löslichen. Es ist nicht schwer, die Mengenverhältnisse zu treffen, bei welchen die Mischung solcher Lösungen als Mischfarbe ein schmutziges Weiss ergibt. Der Versuch zeigt, dass Gemische von Pigmentfarben sich unter Umständen gerade so verhalten wie Gemische reiner Spectralfarben; ähnlich verhalten sich bekanntlich auch die Mischungen von Cobalt- und Nickelsalzlösungen, welche gleichfalls zur Demonstration der Wirkung von Complementärfarben benutzt werden können. Durch Zusatz von Chlorammonium, Chlornatrium oder sonstigen Alkalosalzen zu der Cobaltlösung kann die sonst nur sehr langsam vor sich gehende Entmischung der durcheinander geschüttelten Lösungen nach Belieben beschleunigt werden, welcher Kunstgriff auch für sonstige derartige Versuche in Anwendung zu kommen hat. Um die Mischfarbe möglichst rein weiss erscheinen zu lassen, sorgt man für eine möglichst intensive Beleuchtung und zeigt den Versuch vor einem dunklen Hintergrunde unter Beseitigung aller weissen Vergleichsobjecte.

Zur Demonstration der Wirkung der Gemische blauer und gelber Farbstoffe kann einerseits eine Lösung von Phenanthrenchinon oder eines anderen (in Wasser unlöslichen, in Amylalkohol mit rein gelber Farbe löslichen) Chinonderivates in Amylalkohol, andererseits eine ammoniakalische Kupferlösung in Wasser verwendet werden. Als Mischfarbe erhält man hier ein helleres, gebrochenes Grün und es zeigt

der Versuch, dass die Mischung der angewandten Pigmentfarben sich wesentlich anders verhält als die Mischung der gleichnamigen Spectralfarben, welche bekanntlich Ergänzungsfarben sind.

Zur Demonstration der Wirkung der Gemische gelber und violetter Farbstoffe kann einerseits wiederum eine Chinonlösung in Amylalkohol, andererseits ein Gemisch der Lösungen von Cobalt und Kupfersalzen in Wasser — dessen Nuance dem Spectralviolett möglichst anzupassen ist — verwendet werden. Bei Anwendung geeigneter Mengenverhältnisse erhält man beim Durcheinanderschütteln solcher Lösungen als Mischfarbe ein schmutziges Weiss. Hier wirken also die angewandten Pigmentfarben Gelb und Violett complementär, während die gleichnamigen Spectralfarben dies bekanntlich nicht thun etc.

Die Anwendung der beiden genannten Lösungsmittel dürfte sich auch für die Anstellung anderweitiger Versuche der Mischung von Farbstofflösungen nach der in Vorschlag gebrachten Methode eignen.

Die Anstellung der Versuche geschieht am besten in hohen, engeren Mischcylindern.

München, Chem. Lab. der k. technischen Hochschule, im Februar 1891.

XII. Ein Spectrosaccharimeter; von Paul Glan.

(Aus den Sitzungsber. d. math.-phys. Cl. d. k. bayer. Acad. d. Wiss.
1890. Bd. 20. Heft IV; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Der Apparat dient dazu, das Drehungsvermögen des Zuckers, oder anderer die Polarisationsebene des Lichts drehender Stoffe, für jede beliebige Farbe des Spectrums zu untersuchen, mit Benützung einer weissen Lichtquelle, der Flamme einer Petroleum- oder Gaslampe, oder von electrischem Licht. Er hat den doppelten Vorzug, von der Farbe des zu untersuchenden Körpers unabhängig zu sein, sodass bei ihm das Entfärben von Zuckerlösungen nicht nöthig ist, und eine grössere Genauigkeit der Messung zu gewähren, als die Apparate, welche Natronlicht oder das nichthomogene Licht einer weissen Flamme, welches durch eine Lösung des chromsauren Kalis gegangen ist, oder weisses Licht benutzen, weil er die Messung der Drehung im Grün oder Blau gestattet, und Zucker, wie andere Stoffe, die Polarisationsebene dieser Lichtarten erheblich stärker drehen, als die von gelbem Licht. Seine Einrichtung ist die folgende. Der Spalt s_1 befindet sich im Brennpunkt der achromatischen Linse l_1 , und das Licht der Flamme, welches eine Linse von kurzer Brennweite auf den Spalt s_1 concentrirt, tritt parallel aus ihr; es geht dann durch ein Glan'sches Polarisationsprisma p_1 , welches es geradlinig polarisirt, und dann durch ein Diaphragma, das zur Hälfte mit einer dünnen Quarzplatte q , senkrecht zur Axe geschliffen, bedeckt ist. Diese dreht die Polarisationsebene des durch sie gehenden Lichtes um wenige Grade, und zwar für die verschiedenen Farben des weissen Lichtes verschieden viel. Nachdem es durch dies

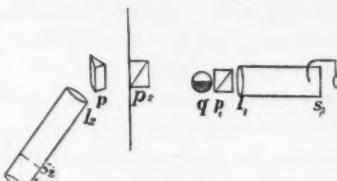


Fig. 1. $\frac{1}{4}$ der natürl. Grösse.

Diaphragma gegangen ist, geht es entweder ungeändert, oder wenn eine Röhre mit Zuckerlösung im Spectrosaccharimeter liegt, durch diese, welche die Polarisationsebenen der einzelnen Farben des durch sie gehenden Lichtes dreht, und durchläuft nun das drehbare Polarisationsprisma p_2 , dessen Drehung an einem getheilten Kreise mit Hülfe eines Nonius bis auf Hundertstel eines Grades abgelesen werden kann. Es geht dann durch das Flintglasprisma p , welches das vom Spalt s_1 herrührende und von der Linse l_1 entworfene Bild zum Spectrum entfaltet, von welchem die achromatische Linse l_2 ein verkleinertes Bild auf dem in ihrem Focus befindlichen Spalt s_2 entwirft, durch den nur eine Farbe desselben hindurchgeht. Er wird darauf durch die achromatische Linse l_3 von kurzer Brennweite in dieser Farbe vergrössert gesehen, wenn sie um ihre Brennweite von ihm absteht. Die Linse l_2 entwirft nun auch von dem Diaphragma mit der Platte q ein Bild hinter der Ebene des Spaltes s_2 , zwischen ihm und der Linse l_3 , das man mit dieser sehen kann, wenn man sie soweit herauszieht, dass sie um ihre Brennweite von diesem Bilde entfernt ist, und das in der Farbe erscheint, welche vom Spectrum durch den Spalt s_2 getreten ist. Da für jede Farbe die Polarisationsebenen des Lichtes, welches durch die unbedeckte und die mit der Platte q bedeckte Hälfte des Diaphragmas gegangen ist, einen Winkel miteinander bilden, so erscheinen diese beiden Hälften nur dann gleich hell, nachdem das von ihnen ausgehende Licht durch das Polarisationsprisma p_2 gegangen ist, wenn dessen Polarisationsebene diesen Winkel halbiert, oder zu der Halbirungslinie desselben senkrecht ist. Die letztere Stellung desselben ist diejenige, bei welcher die kleinste Drehung von dieser Stellung aus den grössten Helligkeitsunterschied des Bildes der beiden Hälften bewirkt; sie ist deshalb diejenige, in die man das Polarisationsprisma p_2 bei der Messung bringt. Dreht man nämlich das letztere von der Stellung, bei der seine Polarisationsebene den Winkel α derjenigen der Hälften des Lichtbündels, welche durch den freien und bedeckten Theil des Diaphragmas gegangen sind, halbiert, um den sehr kleinen Winkel γ , so wird das Helligkeitsverhältniss dieser beiden Hälften $1 + 4 \operatorname{tg}(\alpha/2) \sin \gamma$; dreht man es dagegen von der Stellung,

bei der seine Polarisationsebene senkrecht zur Halbirungslinie des Winkels α ist, um denselben kleinen Winkel γ , so wird dies Helligkeitsverhältniss $1 - 4 \operatorname{ctg}(\alpha/2) \sin \gamma$. Es ist also seine Änderung durch die Drehung um den Winkel γ im letzteren Fall grösser, weil der Winkel α nur wenige Grade beträgt. Man stellt den Apparat zuerst wie einen Spectralapparat ein, indem man den Spalt s_1 mit Natronlicht beleuchtet, bringt den Spalt s_2 6 cm von der Linse l_2 , — er steht dann in ihrem Focus — und zieht nun die Linse l_3 so weit heraus, dass der Spalt s_2 deutlich sichtbar ist. Jetzt bringt man s_1 in eine solche Entfernung von der Linse l_2 , dass man das Bild des Spaltes s_1 mit dem Spalt s_2 zugleich deutlich sieht. Dem Spalt s_1 gibt man, im allgemeinen, eine Breite von etwa $1/3$ mm, und gibt dem Spalt s_2 eine solche Breite, dass er ebenso breit erscheint, wie das in seiner Ebene entworfene Bild des Spaltes s_1 . Dieses füllt dann den Spalt s_2 vollständig aus, wenn das kleine Keppler'sche Fernrohr mit den Linsen l_2 und l_3 , welches um die Axe des Tischchens mit dem Flintglasprisma p drehbar ist, durch Drehung passend gestellt ist. Sowohl das Spaltrohr als das Fernrohr können durch je drei Stellschrauben in ihren Lagern gedreht werden, dass das Bild des Spaltes s_1 von der Mitte des Gesichtsfeldes des Keppler'schen Fernrohrs weder nach oben, noch nach unten abweicht, und das vom Spaltrohr ausgehende Licht durch das von mir angegebene Polarisationsprisma p_2 axial, oder nahezu axial, geht. Das Bild des Spaltes s_1 kann dann durch Drehung des Polarisators p_2 völlig verlöscht werden. Man kann nun diese Linse l_3 weiter herausziehen, während der Spalt s_2 seine Stellung unverändert behält, bis das Bild des Diaphragmas mit der Platte q deutlich erscheint. Seine beiden Hälften werden im allgemeinen verschieden hell erscheinen; dreht man indes das Polarisationsprisma p_2 , bis das Licht einer Hälfte verlöscht, so wird man durch eine kleine Drehung desselben von dieser Lage aus eine solche finden, bei der die beiden Hälften gleich hell sind, und eine Drehung von wenigen Hundertsteln eines Grades von dieser letzteren genügt, um einen merklichen Helligkeitsunterschied der beiden Hälften in ihrem Bilde im Fernrohr hervorzubringen.

Beleuchtet man den Spalt s_1 mit weissem Licht, und schiebt die Linse l_3 wieder so weit hinein, dass der Spalt s_2 sichtbar ist, so erscheint er in derjenigen Spectralfarbe, welche von dem durch das Flintglasprisma p in seiner Ebene entworfenen Spectrum auf ihn fällt, und zieht man nun die Linse l_3 so weit heraus, dass man das Diaphragma mit der Quarzplatte q erblickt, so erscheint dies in dieser Farbe. Um die erblickte Farbe zu charakterisiren, stellt man die Linse l_3 auf den Spalt s_2 ein, und beleuchtet den Spalt s_1 mit Lithium-, Natron-, Thallium-, Strontium-, Rubidium-Licht, und merkt die Stellung des Keppler'schen Fernrohrs mit Hülfe des mit ihm fest verbundenen Nonius an der Theilung am Rande des Tischchens, wenn das Bild des Spaltes s_1 von einer dieser Flammen beleuchtet im Spalt s_2 erscheint. Oder man verengt den ersteren und erhellt ihn mit Tageslicht, bis die Fraunhofer'schen Linien im zweiten sichtbar werden. Die Stellungen des Fernrohrs, bei denen je eine von ihnen in seiner Mitte erscheint, bemerkt man gleichfalls an der erwähnten Theilung. Man erhält so eine ausreichende Anzahl fest bestimmter Stellungen des Fernrohrs, bei denen genau charakterisirte homogene Farben durch den Spalt s_2 gehen, für die man das Drehungsvermögen des zu untersuchenden Stoffes mit dem Spectrosaccharimeter bestimmen kann.

Das Spectrosaccharimeter bedarf einer hellen Lichtquelle und ich habe lichtstarke Lampen mit eigens construirten Lichtcondensatoren angewandt. Die Lampen sind Petroleum-

lampen von mindestens 36 Kerzen Lichtstärke, sogenannte Blitzlampen, welche eine sehr weisse, an blauem und brechbarerem Licht reiche Flamme geben. Der Lichtcondensator, dessen Gestalt Fig. 2 zeigt, concentriert möglichst alles von der runden Flamme der Blitzlampe ausgesandte Licht auf die kleine kreisförmige Oeffnung des-

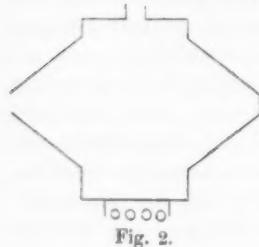


Fig. 2.

selben von 2 cm Durchmesser, aus der das Licht aus ihm austritt, und der möglichst nahe dem Spalte s_1 des Spectrosacchari-

meters gebracht wird. Er besteht aus einem Blechkasten, dessen Innenwände mit Neusilberplatten belegt sind; die Platten an den Wänden des Kastens, in welche die conischen Condensatoren nicht eingesetzt sind, divergiren nach der Oeffnung des Lichtcondensators, sodass das auf sie fallende Licht dem konischen Condensator zugespiegelt wird, aus dem das Licht austritt. Diese konischen Condensatoren sind innen polirte Kegel aus Neusilberblech, welche an ihrem breiteren Ende eine Weite von etwa 10 cm, an ihrem schmalen eine solche von etwa 2 cm haben. Der eine von ihnen ist an seinem schmalen Ende durch eine Platte von Neusilber verschlossen, welche das auf sie concentrirte Licht wieder aus dem Condensator zurückwirft und dem andern zuschickt. Der Lichtcondensator trägt an seinem unteren Ende einen durchlöcherten Hals und an seinem oberen einen kurzen schornsteinartigen Ansatz, um den Luftwechsel im Innern des Kastens zu begünstigen. Er gibt eine starke Concentration des Lichts an seiner kleinen kreisförmigen Oeffnung.

Ich gebe hier einige Einstellungen auf gleiche Helligkeit der beiden Hälften des Diaphragmas mit der Platte q , für die Stellung des Polarisators p_2 , bei der eine kleine Drehung desselben von der Einstellung auf gleiche Helligkeit den grössten Helligkeitsunterschied der beiden Hälften bewirkt, während keine Röhre mit Flüssigkeit im Apparat lag. Ich bemerke dazu, dass diese Beobachtungen vor der Herstellung des Lichtcondensators mit einer einfachen Gaslampe ange stellt sind, welche mit einem schwarzen Blechylinder mit spaltförmigem Ausschnitt umkleidet war. Sie sind im rothen, grünen und blauen Licht des Spectrums ausgeführt, von dem das Blau das äusserste gerade noch sichtbare des Spectrums der Gasflamme war. Die mit einem Fragezeichen versehene Einstellung im Blau habe ich ausgeschlossen, weil ich während derselben gestört wurde. Ausser dem Mittel der einzelnen Einstellungen ist die grösste Abweichung von ihm in Graden und Minuten angegeben.

Roth	4,02	4,02	3,99	3,96	=	3,997°	Gr. Ab.	0,037°	=	2,2'
Grün	3,43	3,43	3,46	3,43	=	3,437°	Gr. Ab.	0,023°	=	1,4'
Blau	2,31	2,28	2,50(?)	2,40	=	2,330°	Gr. Ab.	0,070°	=	4,2'.

Ich theile hier weiter eine Anzahl Einstellungen mit, welche sowohl ohne Röhre, wie die vorigen, als nach dem Einlegen einer solchen von 2,16 cm Länge in das Spectrosaccharimeter, welche mit schwach concentrirter Zuckerlösung gefüllt war, angestellt sind. Ich konnte sie durch die Güte des Hrn. Geheimrath Prof. Dr. Scheibler in dessen Laboratorium ausführen, wofür ich ihm hier meinen aufrichtigsten Dank ausspreche, in dem ich die ersten Prüfungen des Spectrosaccharimeters anstellte. Sie sind für die dem Natronlicht entsprechende Stelle des Spectrums ausgeführt.

D.

$$\begin{array}{lllllll} \text{Ohne Röhre} & 13,40 & 13,46 & 13,43 & 13,45 & = 13,435^{\circ} \text{ Gr. A. } 0,035^{\circ} = 2,1' \\ \text{Mit Röhre} & 15,45 & 15,49 & 15,46 & & = 15,467^{\circ} \text{ Gr. A. } 0,023^{\circ} = 1,4'. \end{array}$$

Sie ergeben, auch wenn die Röhre mit Flüssigkeit im Spectrosaccharimeter liegt, keine grössere Unsicherheit der Messung. Die Röhren müssen hier mit besonderer Sorgfalt hergestellt werden; wenn ihre Endflächen nicht parallel sind, stellen sie, mit Flüssigkeit gefüllt, ein Flüssigkeitsprisma dar, und bei ihrem Einlegen in das Spectrosaccharimeter kann dann das Spectrum in der Ebene des Spaltes s_2 verschoben werden, und die Farbe des Spectrums sich ändern, welche durch ihn geht. Die Röhren werden deshalb bei ihrer Herstellung auf die Parallelität ihrer Endflächen geprüft, indem der Spalt s_1 mit Natronlicht beleuchtet wird, die Linse l_3 auf den Spalt s_2 eingestellt und dieser so erweitert wird, wenn nöthig, dass ihn das Bild des Spaltes s_1 ganz ausfüllt. Dies letztere darf sich dann bei dem Einlegen und Drehen der mit Flüssigkeit gefüllten Röhre im Spectrosaccharimeter gegen den Spalt s_2 nicht verschieben. Am besten ist es, wenn die Verschlussringe der Röhre mit einer Marke versehen werden, erst mit Wasser gefüllt, und mit der Marke nach oben eingelegt werden, und dann die Anfangsstellung des Polarisators p_2 bestimmt wird. Hierauf werden die Röhren mit der drehenden Flüssigkeit gefüllt und wieder mit der Marke nach oben untersucht. Zum Zwecke von Analysen empfiehlt sich die Benutzung des grünen Lichtes des Spectrums, indem man den Spalt s_1 einmal etwa mit Thalliumlicht beleuchtet, und die Stellung des Fernrohrs an

der ihm zugehörigen Theilung merkt, bei der das Bild des Spaltes s_1 in dieser Farbe den Spalt s_2 ausfüllt. Grün ist für das Auge sehr angenehm, was bei einer grösseren Anzahl von Messungen von Belang ist, und die Einstellung in dieser Farbe eine sehr sichere.

Ich hoffe, dass das Spectrosaccharimeter auch dem spectralen Studium der Circularpolarisation der Krystalle nützliche Dienste leisten wird, wenn es mit passenden Einrichtungen versehen wird, dass es die allgemeinere Untersuchung der Rotationsdispersion erleichtern und der quantitativen drehungsmessenden Analyse förderlich sein wird. Das Spectrosaccharimeter wird von der Firma Lisser und Benecke in Berlin hergestellt.

Nachtrag. Wenn man das Spectrosaccharimeter so eingestellt hat, dass man durch die Linse l_3 das Bild des Diaphragmas mit der Quarzplatte q erblickt, und zwar in dem engbegrenzten Farbengemisch, welches vom Spectrum durch den Spalt s_2 geht, so stellt sich die Erscheinung so dar, als ob es von einer Flamme beleuchtet wäre, welche dies Farbengemisch aussendet. Durch das Prisma p allein betrachtet würde dabei das Bild desselben etwas verbreitert erscheinen, indem die weniger brechbaren Farben auf der einen, die brechbareren auf der anderen Seite des Bildes hervortreten, während der grössere mittlere Theil in der Mischfarbe des Farbengemisches erscheint. Es ist das besonders bemerkbar, wenn der Spalt s_2 auf die Theile des Spectrums gestellt wird, in denen sehr rasche Farbenwechsel stattfinden, wie sie diejenigen sind, welche zwischen dem Gelbgrün und Orange liegen. Das Bild erscheint ebenso an den Rändern anders gefärbt, wenn man es durch das Fernrohr betrachtet, das es ja nur vergrössert. Bei den Messungen stellt man die gleiche Helligkeit der oberen und unteren Hälften im grösseren, mittleren, gleichfarbigen Theile her.

Man kann jedoch das Bild in folgender Weise vollkommen kreisrund und durchweg gleichfarbig erhalten. Ich brachte vor das Ocular des Fernrohrs ein zweites Flintglasprisma mit seiner brechenden Kante parallel derjenigen des

Prismas p und so, dass die Kante des brechenden Winkels bei beiden nach derselben Seite des Raumes wies und erblickte dann, wenn ich in passender Richtung durch dasselbe bei passender Stellung desselben sah, das Bild des Diaphragmas mit der Quarzplatte q ganz gleichfarbig und kreisrund, und in den allmählich wechselnden Farbentonnen des Spectrums, wenn ich das Fernrohr drehte.

Man kann ein ebensolches Prisma wie p drehbar an einem Ringe befestigen, der über das Ocularrohr des Fernrohrs zu schieben ist.

Berlin, den 15. März 1891.